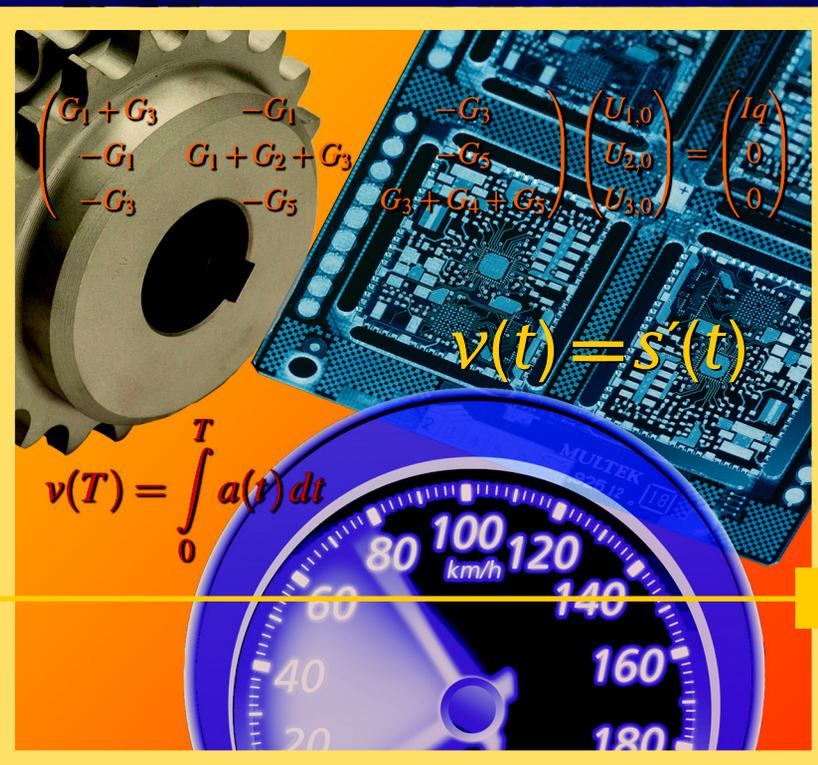


Michael Knorrenschild

Mathematik für Ingenieure 1

Grundlagen im Bachelorstudium



HANSER

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen (Steilkurs)	1.1	Fakten zu Funktionen	13
	1.2	Trigonometrische Funktionen	20
	1.3	Hyperbelfunktionen	26
	1.4	Erste Schritte in MATLAB	29
	1.4.1	Einfache arithmetische Ausdrücke	29
	1.4.2	Plotten von Funktionen	31
	1.4.3	Selbst definierte Funktionen	33
	1.5	Arbeitstechniken	34
2 Erste Begegnung mit dem Unendlichen	2.1	Folgen und Grenzwerte	38
	2.2	Grenzwerte bei Funktionen – Stetigkeit	50
	2.3	Uneigentliche Grenzwerte	60
3 Polynome und rationale Funktionen	3.1	Polynome	65
	3.1.1	Das Horner-Schema	66
	3.1.2	Multiplikation von Polynomen	75
	3.2	Rationale Funktionen	76
	3.2.1	Partialbruchzerlegung	78
	3.2.2	Grenzwertverhalten von rationalen Funktionen	84
4 Vom Reellen zum Komplexen	4.1	Komplexe Zahlen	87
	4.2	Wurzelrechnung	97

5	Differenzialrechnung	5.1	Differenzierbarkeit und Ableitung	103
		5.2	Extremwerte	114
		5.3	Numerische Bestimmung von Nullstellen: Newton- und Sekantenverfahren	122
		5.4	Regeln von L'Hospital	127
		5.5	Höhere Ableitungen	130
6	Integralrechnung	6.1	Grundlagen	141
		6.2	Berechnung von Stammfunktionen	151
		6.2.1	Partielle Integration	157
		6.2.2	Integration von rationalen Funktionen	158
		6.2.3	Substitutionsregel	162
		6.3	Mittelwertsatz der Integralrechnung	170
		6.4	Uneigentliche Integrale	171
		6.5	Berechnung von Längen von Kurven	175
		6.6	Rotationskörper	177
		6.7	Kurven in Parameterform	180
		6.8	Integration von Funktionen über Polarkoordinaten	183
7	Lineare Algebra	7.1	Vektorrechnung	189
		7.1.1	Grundlagen	189
		7.1.2	Geraden	197
		7.1.3	Ebenen	201
		7.1.4	Abstandsberechnungen	209

7.2	Vektorräume und ihre Darstellung	214
7.3	Lineare Gleichungssysteme	225
7.3.1	Die Lösungsmenge von homogenen linearen Gleichungssystemen	233
7.3.2	Die Lösungsmenge von inhomogenen linearen Gleichungssystemen	236
7.3.3	Der Gauß-Algorithmus – Praktische Lösung von linearen Gleichungssystemen	244
7.4	Determinanten	249
7.5	Orthogonalbasen	254
7.6	Spezielle Matrizen	263
7.7	Lineare Abbildungen	268
8	Unendliche Reihen	
8.1	Grundlagen	276
8.2	Taylor-Reihen	283
	Lösungen	295
	Literaturverzeichnis	327
	Deutsch – Englisch	329
	Englisch – Deutsch	331
	Sachwortverzeichnis	333

Liste der Anwendungen

Elektrotechnik: Abtasten von Signalen	39
Informatik: Aufwand beim Sortieren von Arrays	45
Statistik: Die Gaußsche Glockenkurve	62
Umrechnung in andere Zahlensysteme	69
Schwingungen	94
Elektrotechnik – Zeigerdarstellung	95
Elektrotechnik: Komplexe Widerstände	96
Physik: Geschwindigkeit I	105
Elektrotechnik: Kondensator und Spule	112
Physik: Geschwindigkeit II	117
Fehlerfortpflanzung bei Funktionsauswertungen	117
Mechanik: Das Bierdosenproblem	120
Elektrotechnik: Die sinc-Funktion	128
Physik: Beschleunigung	131
Elektrotechnik: Integral einer Schaltfunktion I	145
Physik: Geschwindigkeit III	153
Physik: Freier Fall	154
Mechanik: Massen, Momente, Schwerpunkt	166
Physik: Arbeit als Integral	168
Elektrotechnik: Gleichwert, Wechselstrom	171
Elektrotechnik: Wirkleistung und Effektivwert	171
Elektrotechnik: Integral einer Schaltfunktion II	174
Vektoren	192
Physik: Kräfte	193
Physik: Tangentenvektor	193
Physik: Arbeit (mit Vektoren)	196
Physik: Drehmoment	206
Elektrotechnik: Eintor, Zweitor	226
Elektrotechnik: Knotenpotenzialmethode	226
Elektrotechnik: Überlagerungssatz	237
Elektrotechnik: Zweitor	243
Elektrotechnik: Signalverarbeitung mit Filtern	270
Statistik: Gaußsches Fehlerintegral	292

Liste der MATLAB-Beispiele

Einfache arithmetische Ausdrücke	29
Plotten von Funktionen	31
Selbst definierte Funktionen	33
Polynome	69
Umrechnung in andere Zahlensysteme	70
Produkt von Polynomen, Faltung	76
Polynomdivision	77
Komplexe Zahlen: Real- und Imaginärteil, Polardarstellung	92
Komplexe Zahlen: Wurzeln	98
Ableitung von Polynomen	110
Numerische Bestimmung von Extremstellen	121
Numerische Bestimmung von Nullstellen	126
Numerische Berechnung von Integralen	148
Stammfunktion von Polynomen	152
Vektoren, Norm, Komponenten	194
Skalarprodukt, Kreuzprodukt	213
Matrizen	220
Lösung von linearen Gleichungssystemen	241
Lösung von linearen Gleichungssystemen	249
Determinanten	250
transponierte Matrix	254
Gram-Schmidt Verfahren, Orthogonalisierung von Matrizen	261
Die harmonische Reihe	278

1 Grundlagen (Steilkurs)

Wir beginnen mit einer sehr gerafften Zusammenstellung von wichtigen Fakten. Dass Sie den Schulstoff beherrschen, wird vorausgesetzt. Ohne diese Vorarbeit werden Sie an diesem Buch – und an keinem anderen Mathematik-Buch, an keiner Vorlesung und Übungsstunde Freude haben. Und ohne Freude lernt es sich schlecht.

Die Mehrzahl der Begriffe in diesem Kapitel sollten Ihnen deshalb bekannt vorkommen, oder mehr als das: Sie sollten damit vertraut sein. Sie finden daher hier auch keine größeren Beispiele. Unabdingbar ist aber das Verständnis des Funktionsbegriffs, daher finden Sie hier nochmals die genauen Definitionen. Etwas ausführlicher wird es bei den hyperbolischen Funktionen, die nicht unbedingt in Schulen und Vorkurs behandelt werden.

Ein erster Einstieg in MATLAB gehört ebenfalls dazu. Weiter einige generelle Hinweise zum Herangehen an Aufgabenstellungen (nicht nur in der Mathematik), damit Sie, egal wie schwer oder leicht die Aufgabe ist, einen Einstieg finden. Mit diesen Hinweisen gehören Hindernisse wie „Ich wusste gar nicht, wie ich die Aufgabe anfangen sollte“ der Vergangenheit an. Für den Start in die Lösung einer Aufgabe ist also gesorgt, und wie's danach weitergeht ist eine Übungssache.

1.1 Fakten zu Funktionen

Definition 1.1

Eine **Funktion** $f : X \longrightarrow Y$ (auch **Abbildung** genannt) ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zu. Die Menge X heißt dabei **Definitionsbereich**, Y heißt **Wertebereich**. Die wirklich getroffenen Bildpunkte bezeichnet man als **Bildmenge** von f und schreibt:

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \text{es gibt } x \in X \text{ mit } f(x) = y\}.$$

Der Graph einer Funktion f ist die Menge

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

Eine Funktion kann man auch notieren als $f : x \mapsto f(x)$ und bezeichnet dabei x als die **Variable** (Veränderliche) und $f(x)$ als den **Funktionswert an der Stelle x** .

Funktion, Abbildung

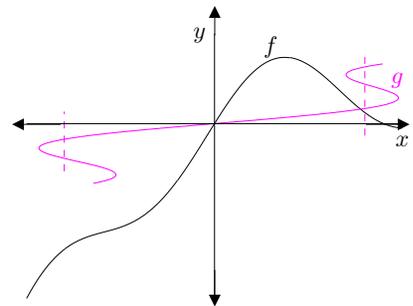


Bild 1.1 Die schwarze Linie ist der Graph einer Funktion f , denn jedem x wird genau ein $y = f(x)$ zugeordnet. Die rote Linie ist der Graph einer Zuordnung g , die keine Funktion ist, denn manchen x sind mehrere y zugeordnet.

Es ist unbedingt nötig, die Funktion f vom Funktionswert $f(x)$ zu unterscheiden. Dies sind völlig verschiedene Objekte: f ist eine

! Immer schön Funktion f (eine Zuordnung) und Funktionswert $f(x)$ (meist eine Zahl) auseinanderhalten, um nicht unnötige Verwirrung zu schaffen.

Umkehrbarkeit von Funktionen

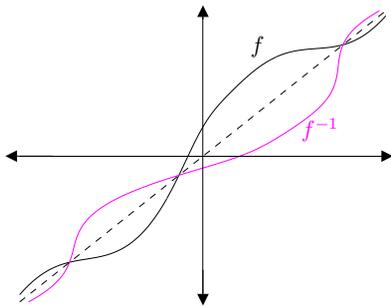


Bild 1.2 Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktionen sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden.

! Umkehrfunktion f^{-1} nicht mit Kehrwert $\frac{1}{f}$ verwechseln. Bei Funktionswerten dagegen hilft genaues Lesen: f^{-1} ist der Wert der Umkehrfunktion an der Stelle x , während $(f(x))^{-1}$ der Kehrwert von $f(x)$ ist.

Komposition von Funktionen

Zuordnung, $f(x)$ ist (meist) eine Zahl. In vielen Büchern findet man Formulierungen wie „... eine Funktion $f(x)$...“, was, genau genommen, Unsinn ist. Diese saloppe Formulierung ist in Ordnung, wenn jeder weiß, was gemeint ist, führt aber in anderen Situationen zu Unklarheiten und Missverständnissen.

Definition 1.2

Sei $f : X \rightarrow f(X)$ und $M \subseteq X$. f heißt **umkehrbar** auf M , wenn jedes $y \in f(M)$ nur genau einmal getroffen wird, d. h.

$$\text{für alle } x_1, x_2 \in M \text{ gilt: } f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Die Abbildung, die jedem Bildpunkt $f(x)$ das dann eindeutige x zuordnet, heißt **Umkehrfunktion** $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$.

Ob jedes y nur einmal getroffen wird, sieht man, indem man versucht, die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufzulösen. Gelingt dies äquivalent und in eindeutiger Weise, so gibt es zu jedem y nur genau ein x , das y wird also nur einmal getroffen. Am Ende der Auflösung nach x steht auf der anderen Seite der Gleichung $f^{-1}(y)$.

Beispiel 1.1

f gegeben durch $f(x) = 5x + 7$ soll auf Umkehrbarkeit geprüft werden. Umstellung ergibt:

$$y = 5x + 7 \iff x = \frac{1}{5}(y - 7)$$

also ist f umkehrbar und die Umkehrfunktion f^{-1} hat die Funktionsvorschrift $f^{-1}(x) = 0.2(x - 7)$. ■

Definition 1.3

Hat man zwei Funktionen f und g , so bezeichnet man mit $f \circ g$ die Komposition (Hintereinanderausführung) der Funktionen. Es ist dann

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Sind f und g umkehrbar, ist auch $f \circ g$ umkehrbar und es gilt:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)).$$

Die Komposition $f \circ g$ kann nur gebildet werden, wenn die Bildmenge von g im Definitionsbereich von f liegt. Bei $f \circ g$ wird zuerst g angewandt und danach f . Entsprechend gilt bei den Umkehrfunktionen: Damit $(f \circ g)^{-1}$ existiert, muss die Bildmenge von f^{-1} im Definitionsbereich von g^{-1} liegen.

Beispiel 1.2

$f(x) = x^2$, $g(x) = x + 4$: Dann ist

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+4) = (x+4)^2 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 4\end{aligned}$$

f ist umkehrbar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. g ist umkehrbar auf \mathbb{R} , $g^{-1}(x) = x - 4$, also gilt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1}(x) &= (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt{x} - 4 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (g \circ f)^{-1}(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \sqrt{x-4} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 4} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Definition 1.4

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- f heißt **streng monoton steigend**, wenn für alle x, y gilt

$$x < y \implies f(x) < f(y).$$
- f heißt **monoton steigend**, wenn für alle x, y gilt

$$x < y \implies f(x) \leq f(y).$$
- f heißt **streng monoton fallend** wenn für alle x, y gilt

$$x < y \implies f(x) > f(y).$$
- f heißt **monoton fallend**, wenn für alle x, y gilt

$$x < y \implies f(x) \geq f(y).$$

Monotonie von Funktionen

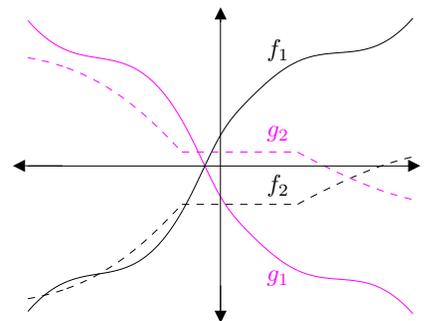


Bild 1.3 f_1 ist streng monoton steigend, f_2 monoton steigend, g_1 ist streng monoton fallend, g_2 monoton fallend.

Translation, Verschiebung

Definition 1.5

Die Abbildung $t_d : x \mapsto x + d$ heißt **Translation** (Verschiebung) um (die Konstante) d .

Translationen bewirken eine Verschiebung des Graphen von f in horizontaler oder vertikaler Richtung.

Die Abbildung t_d an sich ist simpel; interessant wird es, wenn sie mit anderen Funktionen zusammenkommt:

$f \circ t_d$: Hier wirkt sich die Translation in x -Richtung aus.

$$(f \circ t_d)(x) = f(x + d), \text{ siehe Bild 1.4(a).}$$

$t_d \circ f$: Hier wirkt sich die Translation in y -Richtung aus.

$$(t_d \circ f)(x) = f(x) + d, \text{ siehe Bild 1.4(d).}$$

Skalierung

Definition 1.6

Die Abbildung $s_c : x \mapsto cx$ heißt **Skalierung** um (den konstanten Faktor) c .

Skalierungen bewirken eine Stauchung oder Dehnung des Graphen von f um einen Faktor.

Auch eine Skalierung ist für sich selbst nicht sonderlich spannend und entfaltet erst ihre Wirkung im Zusammenspiel mit anderen Funktionen:

$f \circ s_c$: Hier wirkt sich die Skalierung in x -Richtung aus.

$$(f \circ s_c)(x) = f(cx), \text{ siehe Bild 1.4(b).}$$

$s_c \circ f$: Hier wirkt sich die Skalierung in y -Richtung aus.

$$(s_c \circ f)(x) = cf(x), \text{ siehe Bild 1.4(e).}$$

Spiegelung

Definition 1.7

Die Skalierung $s : x \mapsto -x$ heißt **Spiegelung**.

Spiegelungen bewirken eine Spiegelung des Graphen von f an der x - bzw. y -Achse.

Eine Spiegelung ist also nichts anderes als eine Skalierung um den Faktor -1 . Sie heißt natürlich Spiegelung, weil etwas gespiegelt wird. In Kombination mit einer Funktion f wird nämlich der Graph von f gespiegelt und zwar

$f \circ s$: Spiegelung an y -Achse: $(f \circ s)(x) = f(-x)$, siehe Bild 1.4(c)

$s \circ f$: Spiegelung an x -Achse: $(s \circ f)(x) = -f(x)$, siehe Bild 1.4(f).

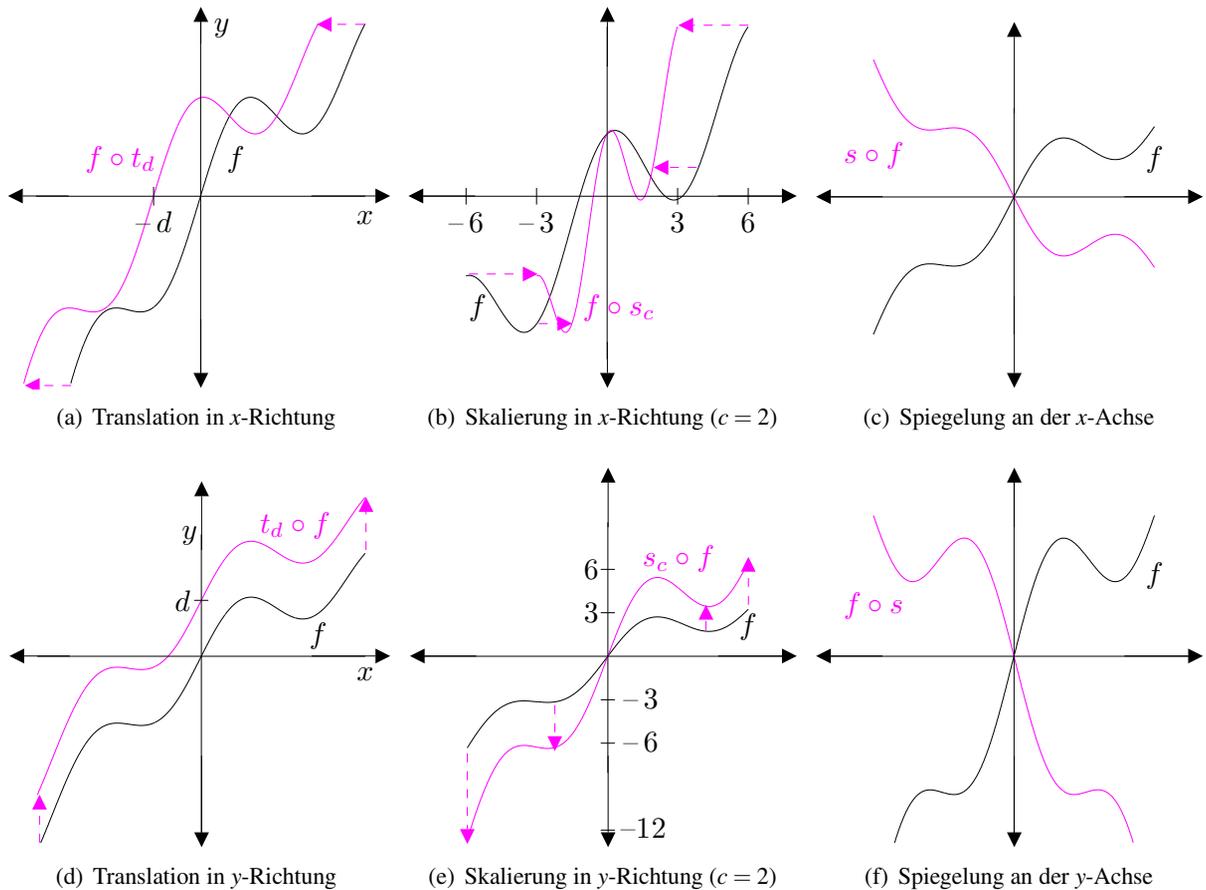


Bild 1.4 Translation, Skalierung und Spiegelung: Auswirkungen am Graphen von f

Definition 1.8

Polynom vom Grad n

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Polynom vom Grad n . Die a_i , $i = 0, \dots, n$ nennt man auch die **Koeffizienten** des Polynoms. Das Polynom $p(x) = 0$ konstant heißt **Nullpolynom**.

Sachwortverzeichnis

- Abbildung, 13
 - lineare, 268
- Ableitung, 104
 - höhere, 130
- absolut konvergent, 279
- Absolutbetrag, 89
- absolutes Extremum, 115
- Abstand
 - Gerade-Ebene, 210
 - Gerade-Gerade, 212
 - Punkt-Ebene, 209
 - Punkt-Gerade, 211
 - Punkt-Punkt, 209
- Additionstheorem
 - für sin und cos, 22, 94
 - für sinh und cosh, 27
 - für tan, 23
- Algorithmus, 45
- Amplitude, 22
- Arbeit, 168, 196
- Arbeitsintegral, 168
- arccos, 24
- arccot, 24
- arcsin, 24
- arctan, 24
- Argument, 90
- Asymptote, 61

- Basis, 217
- Beschleunigung, 131
- beschränkt, 40, 57
- Bierdosenproblem, 120
- Bildmenge, 13
- Bisektion, 59
- Bogenlänge, 185
- Bogenlänge von Kurven, 176, 181

- $C^0(I)$, 131
- $C^n(I)$, 131
- $C^\infty(I)$, 131

- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 196
- Cauchyscher Hauptwert, 174
- cosh, 26
- coth, 26
- Cramersche Regel, 251

- Definitionsbereich, 13
- Determinante, 250
- Dezimalzahl, 69
- Differenzenquotient, 103
- Differenzialrechnung, 103
- differenzierbar, 104
- Dimension, 219
- direkte Verfahren, 244
- Drehmoment, 166, 206
- Drehung, 264
- Dreiecksungleichung, 90, 194
- Dualzahl, 69

- Ebene
 - Koordinatenform, 202
 - Normalenform, 202
 - Parameterdarstellung, 201
- Einheitsmatrix, 220
- Einheitsvektor, 195, 218
- Einheitswurzel, 99
- Eintor, 226
- Ellipsensektor, 183
- Entwicklungspunkt, 284
- Erzeugnis, 214
- Eulersche Formel, 91
- Eulersche Zahl, 49
- Extremum, 115
- Extremwerte, 114

- Faltung, 76
- Federkonstante, 168, 169
- Fehler, absoluter, 117
- Fehlerfortpflanzung, 117
- Fehlerintegral, Gaußsches, 292

- Folge, 38
 - monotone, 39
- freier Fall, 154
- Fußpunkt, 209, 210
- Fundamentalsatz der Algebra, 99
- Funktion, 13
 - gerade, 18
 - monoton fallende, 15
 - monoton steigende, 15
 - periodische, 21
 - rationale, 18
 - streng monoton fallende, 15
 - streng monoton steigende, 15
 - ungerade, 18
- Funktionswert, 13

- Gauß-Algorithmus, 248
- Gaußsche Glockenkurve, 62
- Gaußsche Zahlenebene, 89
- Gaußsches Fehlerintegral, 292
- geometrische Folge, 38
- geometrische Reihe, 277
- geometrische Summenformel, 47
- Gerade, Parameterdarstellung, 197
- Geschwindigkeit, 105, 117, 153
- Gleichungssystem
 - homogenes lineares, 233
 - inhomogenes lineares, 233
 - lineares, 225
- Gleichwert, 171
- Glockenkurve, Gaußsche, 62
- Gram-Schmidt-Verfahren, 258
- Grenzwert, 41

- harmonische Reihe, 278, 281
- Hauptsatz der Integralrechnung, 146
- Hauptwert, Cauchyscher, 174
- Hookesches Gesetz, 168
- Horner-Schema, 67
 - vollständiges, 74, 132
- Householder-Matrix, 267

- Hülle, lineare, 214
 Hyperbel, 27
- Imaginärteil, 88
- Integral
 bestimmtes, 143
 unbestimmtes, 142
 uneigentliches, 171
- Integalkriterium, 283
- Integrationskonstante, 142
- integrierbar, 143
- Kettenregel, 112
- Knotenpotenzialmethode, 227
- Koeffizientenvergleich, 65
- komplexe Zahlen, 88
- konjugiert komplex, 89
- konkav, 135
- konvergent, 41
- Konvergenzradius, 287
- konvex, 135
- Koordinaten, 219
- Krümmungskreis, 136
- Kraft, 193
- Kreisfrequenz, 22
- Kreuzprodukt, 204
- Landau-Symbol, 44, 286
- Leibnizkriterium, 283
- Leibnizsche Sektorformel, 183
- linear unabhängig, 217
- Linearisierung, 122
- Linearkombination, 214
- linksgekrümmt, 135
- linksseitig differenzierbar, 107
- linksseitige Ableitung, 107
- Logarithmus
 natürlicher, 19
 Rechenregeln, 19
- Maclaurinsche Reihe, 284
- Mantelfläche, 179
- Matrix, 220
 inverse, 242
 orthogonale, 261
 reguläre, 233
 singuläre, 233
 symmetrische, 252
 transponierte, 252
- Maximum, 115
- Median, 269
- Minimum, 115
- Mittelwertsatz
 der Differenzialrechnung, 117
 der Integralrechnung, 170
- Moivresche Formel, 94
- Monotonie von Funktionen, 15
- Newton, 105
- Newton-Verfahren, 123
- Norm, 193
 Euklidische, 195
- Normalenvektor, 202
- Nullfolge, 41
- Nullmatrix, 220
- Nullpolynom, 17
- Nullstelle, mehrfache, 72, 133
- Nullvektor, 190
- $O(\dots)$, 44, 286
- Oberfläche, 179
- Obersumme, 143
- orthogonal, 196
- orthonormal, 257
- Ortsvektor, 191
- Parallelogramm
 Diagonalen, 200
 Flächeninhalt, 206
- Parallelotop, 207
- Parameterform, 180
- Partialbruchzerlegung, 78
- Partielle Integration, 157
- periodisch, 21
- Permutationsmatrix, 265
- Phasenwinkel, 22
- Pol, 84
- Polardarstellung, 90
- Polarkoordinaten, 25, 90
- Polstelle, 84
- Polynom, 17, 65ff.
- Koeffizienten, 17
- Potenzreihe, 287
- Produkt
 äußeres, 204
 inneres, 195
- Produktregel, 110
- Projektionsmatrix, 266
- Punktoperationen, 44
- Pythagoras, 196
- Quotientenkriterium, 279
- Quotientenregel, 110
- Rang, 223
- Realteil, 88
- Rechenregeln für Logarithmen, 19
- rechte-Hand-Regel, 205
- rechts-obere Dreiecksmatrix, 245
- rechtsgekrümmt, 135
- rechtsseitig differenzierbar, 107
- rechtsseitige Ableitung, 107
- Regeln von L'Hospital, 127
- Reihe
 alternierende, 283
 geometrische, 277
 harmonische, 278, 281
 Konvergenzkriterien, 279
 Maclaurinsche, 284
 rekursiv, 276
 unendliche, 276
- relatives Extremum, 115, 133
- Restglied, Taylorsches, 285
- Rotation, 264
- Rotationskörper, 177
- Rotationsmatrix, 264
- Rückwärtseinsetzen, 245
- Sarrussche Regel, 208
- Sattelpunkt, 134
- Satz
 des Pythagoras, 196
 v. Maximum u. Minimum, 58
 von Rolle, 116
 von Taylor, 285
- Schaltfunktion, 51, 145

- schließlich alle, 41
Schnittwinkel, 109
Schwerpunkt, 168
Schwingung, 22, 94
Sekantenverfahren, 125
senkrecht, 196
sinc-Funktion, 128
sinh, 26
Skalarprodukt, 195
Skalierung, 16
Sortieren, 45
Spaltenraum, 223
Spat, 207
Spatprodukt, 207
Spiegelung, 16
Spirale
 archimedische, 184
 logarithmische, 186
Stammfunktion, 141
Standardbasis, 218
stetig, 52
stetig ergänzbar, 54, 84, 290
stückweise stetig, 144
Substitutionsregel, 162
Superpositionsprinzip, 237
Tangente, 104
Tangentenvektor, 193
tanh, 26
Taylor-Reihe, 284
Taylorpolynom, 284
Teilraum, *siehe* Unterraum
Translation, 16
Trapezregel, 148
Übertragungssatz, 237
umkehrbar, 14
Umkehrfunktion, 14, 60
Umrechnung, 69
uneigentlicher Grenzwert, 60
Ungleichung, Cauchy-Schwarzsche,
 196
Unterraum, 214
Untersumme, 143
Variable, 13
Vektor, 190
Vektorprodukt, 204
Vektorrechnung, 189
Vergleichskriterium
 für uneigentliche Integrale, 175
 für unendliche Reihen, 279
Verschiebung, 16
Volumen, 178
Wechselspannung, 171
Wechselstrom, 171
Wendepunkt, 136
Wertebereich, 13
windschief, 213
Wirkleistung, 171
Wurzel, 97
Wurzelkriterium, 280
Zahl
 Eulersche, 19, 49
 komplexe, 88
Zeigerdarstellung, 95
Zerlegung
 äquidistante, 142
Zerlegung eines Intervalls, 142
Zweiter, 226, 243
Zwischenwertsatz, 58
Zykloide, 181