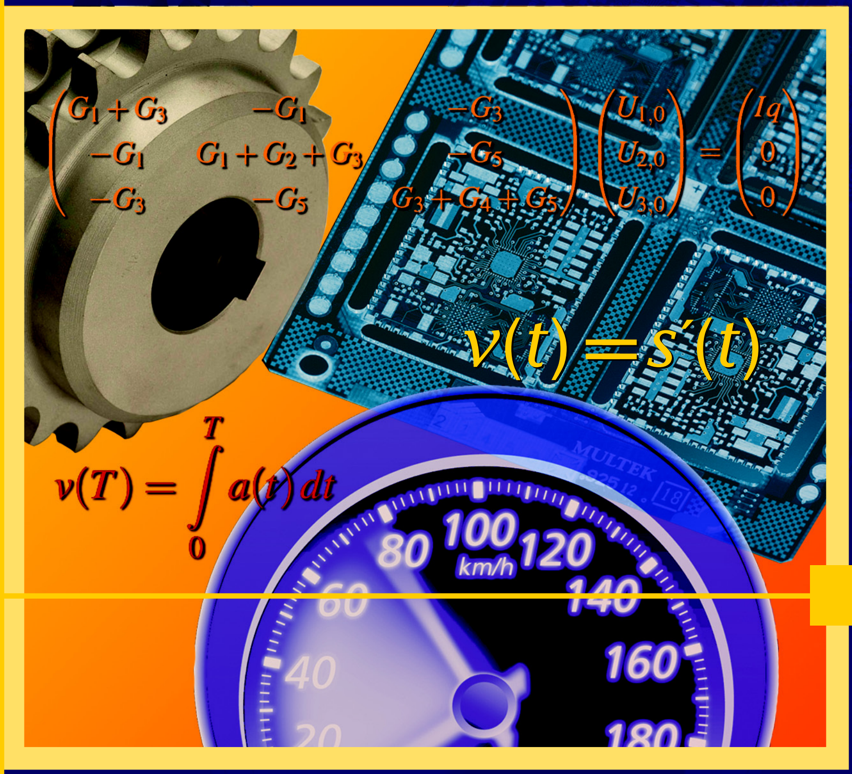
Michael Knorrenschild

Mathematik für Ingenieure 1

Grundlagen im Bachelorstudium



fv

HANSER

Inhaltsverzeichnis

Liste der Anwendungen

Liste der MATLAB-Beispiele

1 Grundlagen (Steilkurs)

Wir beginnen mit einer sehr gerafften Zusammenstellung von wichtigen Fakten. Dass Sie den Schulstoff beherrschen, wird vorausgesetzt. Ohne diese Vorarbeit werden Sie an diesem Buch – und an keinem anderen Mathematik-Buch, an keiner Vorlesung und Übungsstunde Freude haben. Und ohne Freude lernt es sich schlecht.
Die Mehrzahl der Begriffe in diesem Kapitel sollten Ihnen deshalb bekannt vorkommen, oder mehr als das: Sie sollten damit vertraut sein. Sie finden daher hier auch keine größeren Beispiele. Unabdingbar ist aber das Verständnis des Funktionsbegriffs, daher finden Sie hier nochmals die genauen Definitionen. Etwas ausführlicher wird es bei den hyperbolischen Funktionen, die nicht unbedingt in Schulen und Vorkurs behandelt werden.
Ein erster Einstieg in MATLAB gehört ebenfalls dazu. Weiter einige generelle Hinweise zum Herangehen an Aufgabenstellungen (nicht nur in der Mathematik), damit Sie, egal wie schwer oder leicht die Aufgabe ist, einen Einstieg finden. Mit diesen Hinweisen gehören Hindernisse wie „Ich wusste gar nicht, wie ich die Aufgabe anfangen sollte“ der Vergangenheit an. Für den Start in die Lösung einer Aufgabe ist also gesorgt, und wie’s danach weitergeht ist eine Übungssache.

1.1 Fakten zu Funktionen

Definition 1.1

Eine **Funktion** $f : X \longrightarrow Y$ (auch **Abbildung** genannt) ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zu. Die Menge X heißt dabei **Definitionsbereich**, Y heißt **Wertebereich**. Die wirklich getroffenen Bildpunkte bezeichnet man als **Bildmenge** von f und schreibt:
$f(X) := \{ f(x) \mid x \in X\} = \{ y \in Y \mid \text{es gibt}\, x \in X \,\text{mit}\, f(x) = y\}$.
Der Graph einer Funktion f ist die Menge

$$\operatorname{Graph}(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in X\}$$

Eine Funktion kann man auch notieren als $f : x \mapsto f(x)$ und bezeichnet dabei x als die **Variable** (Veränderliche) und $f(x)$ als den **Funktionswert an der Stelle x**.

Funktion, Abbildung

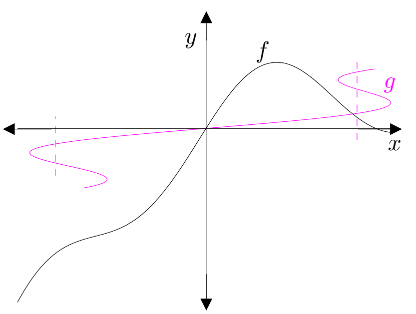


Bild 1.1 Die schwarze Linie ist der Graph einer Funktion f, denn jedem x wird genau ein $y = f(x)$ zugeordnet. Die rote Linie ist der Graph einer Zuordnung g, die keine Funktion ist, denn manchen x sind mehrere y zugeordnet.

Es ist unbedingt nötig, die Funktion f vom Funktionswert $f(x)$ zu unterscheiden. Dies sind völlig verschiedene Objekte: f ist eine

⚠ Immer schön Funktion f (eine Zuordnung) und Funktionswert $f(x)$ (meist eine Zahl) auseinanderhalten, um nicht unnötige Verwirrung zu schaffen.

Zuordnung, $f(x)$ ist (meist) eine Zahl. In vielen Büchern findet man Formulierungen wie „…eine Funktion $f(x)$…“, was, genau genommen, Unsinn ist. Diese saloppe Formulierung ist in Ordnung, wenn jeder weiß, was gemeint ist, führt aber in anderen Situationen zu Unklarheiten und Missverständnissen.

Umkehrbarkeit von Funktionen

Definition 1.2

Sei $f : X \longrightarrow f(X)$ und $M \subseteq X$. f heißt **umkehrbar** auf M, wenn jedes $y \in f(M)$ nur genau einmal getroffen wird, d. h.

$$\text{für alle } x_1, x_2 \in M \text{ gilt:} \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Die Abbildung, die jedem Bildpunkt $f(x)$ das dann eindeutige x zuordnet, heißt **Umkehrfunktion** $f^{-1} : f(M) \longrightarrow M$.

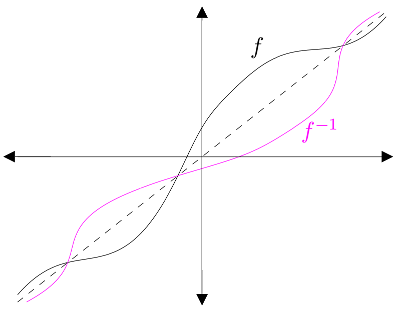


Bild 1.2 Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktionen sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden.

Ob jedes y nur einmal getroffen wird, sieht man, indem man versucht, die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufzulösen. Gelingt dies äquivalent und in eindeutiger Weise, so gibt es zu jedem y nur genau ein x, das y wird also nur einmal getroffen. Am Ende der Auflösung nach x steht auf der anderen Seite der Gleichung $f^{-1}(y)$.

⚠ Umkehrfunktion f^{-1} nicht mit Kehrwert $\frac{1}{f}$ verwechseln. Bei Funktionswerten dagegen hilft genaues Lesen: f^{-1} ist der Wert der Umkehrfunktion an der Stelle x, während $(f(x))^{-1}$ der Kehrwert von $f(x)$ ist.

Beispiel 1.1

f gegeben durch $f(x) = 5x + 7$ soll auf Umkehrbarkeit geprüft werden. Umstellung ergibt:

$$y = 5x + 7 \iff x = \frac{1}{5}(y - 7)$$

also ist f umkehrbar und die Umkehrfunktion f^{-1} hat die Funktionsvorschrift $f^{-1}(x) = 0.2\,(x - 7)$. ■

Komposition von Funktionen

Definition 1.3

Hat man zwei Funktionen f und g, so bezeichnet man mit $f \circ g$ die Komposition (Hintereinanderausführung) der Funktionen. Es ist dann

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Sind f und g umkehrbar, ist auch $f \circ g$ umkehrbar und es gilt:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)).$$

Die Komposition $f \circ g$ kann nur gebildet werden, wenn die Bildmenge von g im Definitionsbereich von f liegt. Bei $f \circ g$ wird zuerst g angewandt und danach f. Entsprechend gilt bei den Umkehrfunktionen: Damit $(f \circ g)^{-1}$ existiert, muss die Bildmenge von f^{-1} im Definitionsbereich von g^{-1} liegen.

Beispiel 1.2

$f(x) = x^2$, $g(x) = x + 4$: Dann ist

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+4) = (x+4)^2 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 4 \end{aligned}$$

f ist umkehrbar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. g ist umkehrbar auf $\mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = x - 4$, also gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{-1}(x) &= (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt{x} - 4 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (g \circ f)^{-1}(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \sqrt{x - 4} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 4} \end{aligned}$$

Definition 1.4

Monotonie von Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- f heißt **streng monoton steigend**, wenn für alle x, y gilt
$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$
- f heißt **monoton steigend**, wenn für alle x, y gilt
$$x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$
- f heißt **streng monoton fallend** wenn für alle x, y gilt
$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$
- f heißt **monoton fallend**, wenn für alle x, y gilt
$$x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y).$$

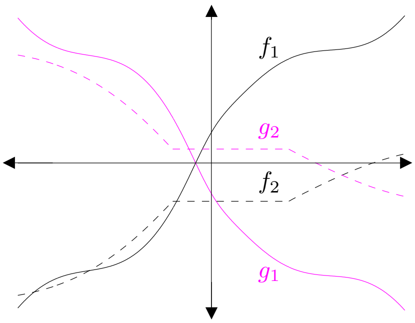


Bild 1.3 f_1 ist streng monoton steigend, f_2 monoton steigend, g_1 ist streng monoton fallend, g_2 monoton fallend.

Translation, Verschiebung

Definition 1.5

Die Abbildung $t_d : x \mapsto x + d$ heißt **Translation** (Verschiebung) um (die Konstante) d.

Translationen bewirken eine Verschiebung des Graphen von f in horizontaler oder vertikaler Richtung.

Die Abbildung t_d an sich ist simpel; interessant wird es, wenn sie mit anderen Funktionen zusammenkommt:
$f \circ t_d$: Hier wirkt sich die Translation in x-Richtung aus.
$(f \circ t_d)(x) = f(x+d)$, siehe Bild 1.4(a).
$t_d \circ f$: Hier wirkt sich die Translation in y-Richtung aus.
$(t_d \circ f)(x) = f(x) + d$, siehe Bild 1.4(d).

Skalierung

Definition 1.6

Die Abbildung $s_c : x \mapsto c\,x$ heißt **Skalierung** um (den konstanten Faktor) c.

Skalierungen bewirken eine Stauchung oder Dehnung des Graphen von f um einen Faktor.

Auch eine Skalierung ist für sich selbst nicht sonderlich spannend und entfaltet erst ihre Wirkung im Zusammenspiel mit anderen Funktionen:
$f \circ s_c$: Hier wirkt sich die Skalierung in x-Richtung aus.
$(f \circ s_c)(x) = f(c\,x)$, siehe Bild 1.4(b).
$s_c \circ f$: Hier wirkt sich die Skalierung in y-Richtung aus.
$(s_c \circ f)(x) = c\,f(x)$, siehe Bild 1.4(e).

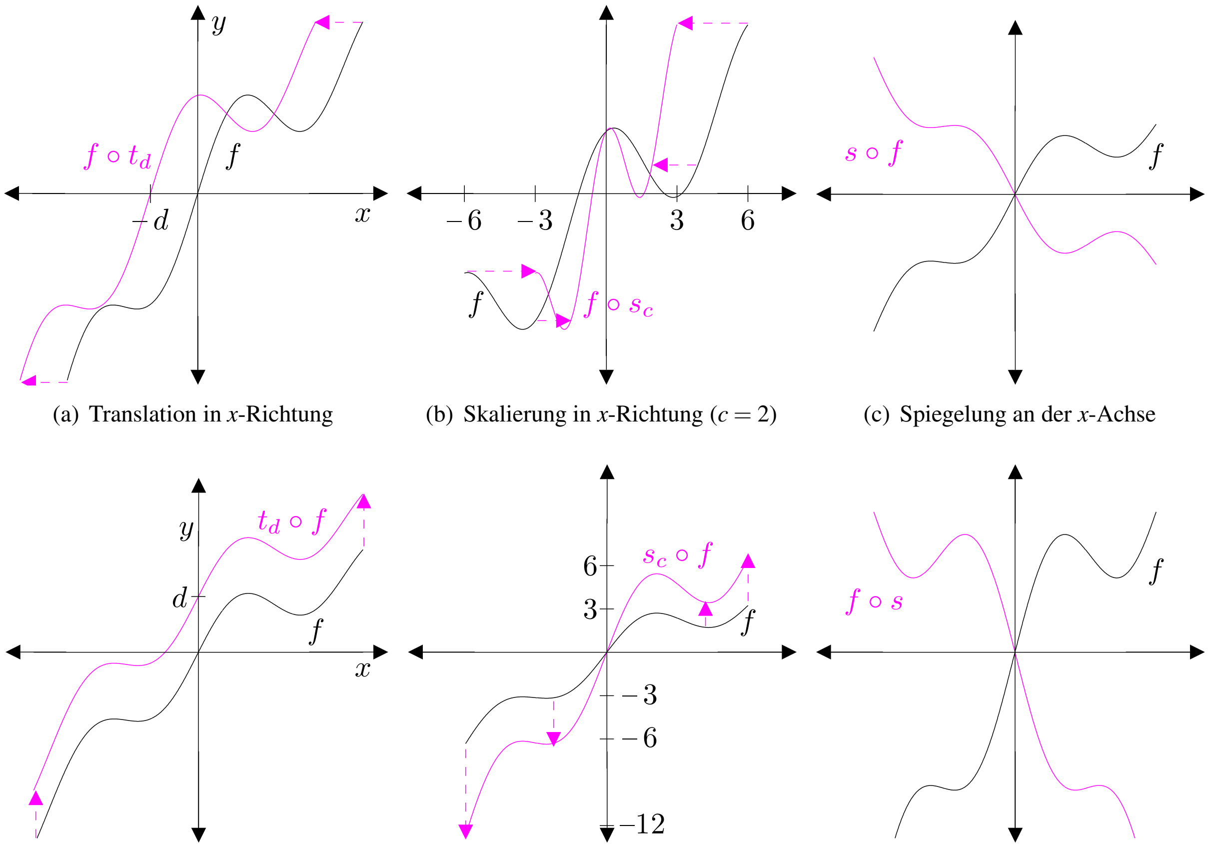
Spiegelung

Definition 1.7

Die Skalierung $s : x \mapsto -x$ heißt **Spiegelung**.

Spiegelungen bewirken eine Spiegelung des Graphen von f an der x- bzw. y-Achse.

Eine Spiegelung ist also nichts anderes als eine Skalierung um den Faktor -1. Sie heißt natürlich Spiegelung, weil etwas gespiegelt wird. In Kombination mit einer Funktion f wird nämlich der Graph von f gespiegelt und zwar
$f \circ s$: Spiegelung an y-Achse: $(f \circ s)(x) = f(-x)$, siehe Bild 1.4(c)
$s \circ f$: Spiegelung an x-Achse: $(s \circ f)(x) = -f(x)$, siehe Bild 1.4(f).



(a) Translation in x-Richtung

(b) Skalierung in x-Richtung ($c = 2$)

(c) Spiegelung an der x-Achse

(d) Translation in y-Richtung

(e) Skalierung in y-Richtung ($c = 2$)

(f) Spiegelung an der y-Achse

Bild 1.4 Translation, Skalierung und Spiegelung: Auswirkungen am Graphen von f

Definition 1.8

Polynom vom Grad n

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Polynom vom Grad n. Die a_i, $i = 0, \ldots, n$ nennt man auch die **Koeffizienten** des Polynoms. Das Polynom $p(x) = 0$ konstant heißt **Nullpolynom**.

Sachwortverzeichnis