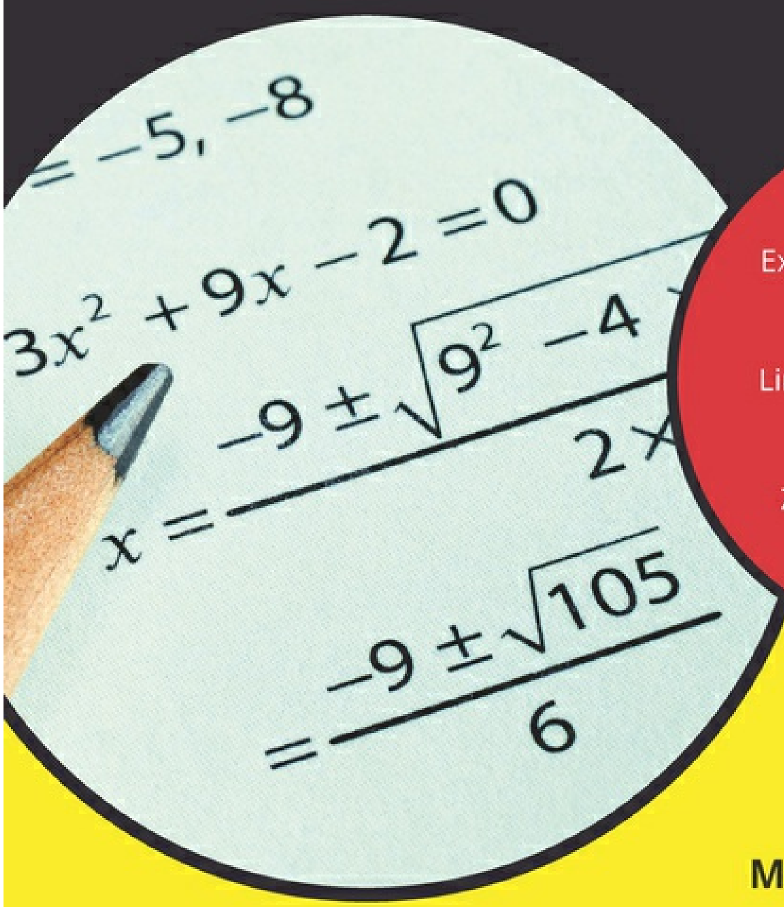
LERNEN LEICHTER GEMACHT

3. Auflage

Algebra

für dummies®



Mit Brüchen, Exponenten und Wurzeln rechnen

Lineare und quadratische Gleichungen lösen

Zinsen berechnen und Rabatte beurteilen

Mary Jane Sterling

Kapitel 1

Sich zum Rechnen rüsten

IN DIESEM KAPITEL

Die Grundlagen aufspüren: Zahlen

Die Mitspieler festmachen: Variablen und Zeichen

Sich zusammenschließen: Funktionen und Terme

Das Spiel kann beginnen: den Regeln folgen

Sehr wahrscheinlich haben Sie das Wort Algebra schon gelegentlich gehört und wussten, dass es irgendetwas mit Mathematik zu tun hat. Sie erinnern sich auch daran, dass Algebra genug Stoff hergegeben hat, um lange genug während Ihrer Schulzeit unterrichtet zu werden. Aber was *ist* sie genau? Wofür wird sie *wirklich* gebraucht?

In diesem Kapitel erfahren Sie die Antwort und darüber hinaus – aufgelockert durch ein paar Exklusivberichte zur Entwicklung der Algebra –, wofür sie gut ist, wie sie gebraucht wird und was Sie benötigen, damit sie funktioniert.

Kurz zusammengefasst kann man sagen, dass Algebra eine Methode ist, Arithmetik anzuwenden. Die Tatsache, dass man in einer Formel Variablen verwenden kann, die *jeden* Wert repräsentieren können, zeigt, dass Formeln mit *allen* Zahlen funktionieren. Algebra arbeitet mit positiven und negativen ganzen Zahlen, Brüchen, Operatoren und Symbolen, um die Beziehung von Werten zueinander aufzuzeigen. Es ist ein System von Zahlen und ihrem Verhältnis zueinander, das nach bestimmten Regeln funktioniert.

Die Gleichung $a \cdot 0 = 0$ zeigt beispielsweise, dass jede reelle Zahl, hier mit *a* wiedergegeben, mit 0 multipliziert wieder 0 entspricht. (Mehr Information zum Thema Multiplikation mit null finden Sie in Kapitel 14.)

In der Algebra lässt sich vieles zusammenfassen. Den Term $x + x + x = 6$ beispielsweise (mit der Lösung $x = 2$), kann man auch mit $3x = 6$ wiedergeben.

Vielleicht denken Sie sich: »Das ist ja alles schön und gut, aber bitte: Ist es wirklich nötig, so etwas zu tun – Buchstaben statt Zahlen zu benutzen?« Aber ja! Schon die ersten Mathematiker haben festgestellt, dass sich Probleme durch die Verwendung von

Buchstaben statt Zahlen vereinfachen lassen. Und genau darum geht es in der Algebra: Probleme zu vereinfachen.

Der grundlegende Zweck der Algebra ist seit Tausenden von Jahren der gleiche: Menschen zu befähigen, Probleme mit unbekannten Antworten zu lösen.

Algebra mit Aha-Erlebnis

Wenn man einen Blick in die Vergangenheit wirft, kann man beobachten, dass sich die Algebra in den verschiedenen Kulturen ein wenig unterschiedlich entwickelt hat. Die Babylonier haben 2000 v. Chr. dreigliedrige quadratische Gleichungen gelöst, während die Ägypter sich mit Lineargleichungen befassten. Die Hindus haben einige Fortschritte im sechsten Jahrhundert n. Chr. gemacht; im siebten Jahrhundert fand Brahmagupta von Indien allgemeingültige Lösungen für quadratische Gleichungen und interessierte sich für den Wert null. Die Hindus betrachteten irrationale Zahlen als reelle Zahlen – auch wenn damals nicht jeder daran glaubte.

Obwohl zu diesen Zeiten niemandem unser hoch entwickeltes Kommunikationsnetz zur Verfügung stand, haben sich auch frühe Kulturen über die Jahrhunderte hinweg ausgetauscht. 825 n. Chr. schrieb al Khawarizmi von Bagdad das erste Algebra-Lehrbuch. Eine der ersten Lösungen einer algebraischen Aufgabe findet sich allerdings schon auf einem circa 3.500 Jahre alten ägyptischen Papyrus. Diese Rarität ist benannt nach dem Schotten Rhind, der den 30 Zentimeter breiten und 5,5 Meter langen Papyrus 1858 in Ägypten kaufte; heute wird er im British Museum in London aufbewahrt. Wissenschaftler haben herausgefunden, dass ein ägyptischer Schreiber namens Ahmes um 1650 v. Chr. einige noch frühere mathematische Arbeiten auf den Rhind-Papyrus abgeschrieben hat.

Eine der Aufgaben lautet: »Aha, es ist ganz, es ist ein Siebtel, es ergibt 19.« Dieses »Aha« ist kein überraschter Ausruf, sondern bezeichnete die Unbekannte. Können Sie diese frühe ägyptische Aufgabe lösen? Heute würde man dafür folgendermaßen schreiben: $x + \frac{x}{7} = 19$. Die Unbekannte ist *x* und die Lösung lautet: $x = 16\frac{5}{8}$. Das ist nicht schwierig, nur etwas ungewohnt ausgedrückt.

Mit den Grundlagen anfangen: Zahlen

Was wären Mathematik und Algebra ohne Zahlen? Zahlen sind ein Teil des täglichen Lebens, aber auch das Grundgerüst, auf dem die Algebra aufbaut. Zahlen geben einem einen Wert, mit dem man arbeiten kann.

Wo wäre unsere Gesellschaft heute ohne Zahlen? Ohne Zahlen, um mit Ellen zu rechnen, hätte Noah nicht seine Arche bauen können. Ohne Zahlen, um Entfernungen, Neigungen, Höhen und Richtungen auszurechnen, hätten die Pyramiden niemals errichtet werden können. Ohne Zahlen, um Navigationspunkte zu errechnen, hätten die Wikinger niemals Skandinavien verlassen können. Ohne Zahlen, um Entfernungen im All zu ermitteln, hätte die Menschheit niemals auf dem Mond landen können.

Sogar die einfachsten Aufgaben und die gewohntesten Lebenssituationen erfordern ein Verständnis von Zahlen. Stellen Sie sich vor, Sie möchten ausrechnen, wie viel Benzin Sie täglich bei der Fahrt zur Arbeit und zurück verbrauchen. Sie benötigen die Anzahl der Kilometer, die Sie zurücklegen, und eine zweite Zahl, die der Kilometer, die Ihr Auto mit einem Liter Benzin fahren kann.

Verschiedene Arten von Zahlen sind wichtig, weil ihr Aussehen und ihr Verhalten die Rahmenbedingungen für bestimmte Situationen festlegen können oder bestimmte Probleme lösen helfen. Es kann natürlich sehr bequem sein, zu verkünden: »Ich werde mich ausschließlich mit ganzen Zahlen beschäftigen«, da ganze Zahlen keine Brüche beinhalten. Das könnte der Fall sein, wenn Sie eine Aufgabe lösen, die mit einer Anzahl von Autos arbeitet. Wer will schon ein halbes Auto?

Die Algebra arbeitet mit verschiedenen Arten von Zahlen – ganzen Zahlen und solchen, die Sie gleich kennenlernen werden –, um verschiedene Arten von Aufgaben zu bewältigen.

Ganz reelle Zahlen

Reelle Zahlen sind das, was der Name sagt. Im Gegensatz zu imaginären Zahlen bezeichnen sie einen *reellen* Wert – sie sind also keine Vortäuscher oder Hochstapler. Reelle Zahlen, die größte Gruppe von Zahlen, beinhalten das ganze Zahlen-Spektrum; sie decken die Skala ab und können jede Form annehmen – Brüche oder ganze Zahlen, Dezimalstellen oder keine Dezimalstellen. Zur großen Welt der reellen Zahlen gehören auch unendliche Dezimalzahlen, die nicht aufhören. Die Vielfalt ist endlos.

In diesem Buch geht es ausschließlich um reelle Zahlen.

Auf natürliche Zahlen zählen

Eine *natürliche* Zahl ist das, was wir uns zuerst unter einer Zahl vorstellen. Welche Zahlen haben Sie als Erstes benutzt? Erinnern Sie sich an die Frage: »Wie alt bist du denn?« Sie haben stolz Ihre Finger hoch gehalten: »Vier!« Die natürlichen Zahlen heißen auch Zählzahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und unendlich so weiter.

Man verwendet natürliche Zahlen, um Gegenstände zu zählen. Manchmal muss man zählen, wie viele Personen anwesend sind. Eine halbe Person würde nicht mitgezählt (und ist eine ziemlich grausige Vorstellung). Man bedient sich natürlicher Zahlen auch, um Listen zu erstellen.

Volle und ganze Zahlen

Ganze Zahlen erweitern den Mathematiker-Horizont schon um einiges. Ganze Zahlen beinhalten alle natürlichen Zahlen, ihr Gegenteil (die Gegenzahl) und die Zahl null (mehr Informationen zum Thema Gegenzahl finden Sie im Abschnitt *Mit Gegenteilen arbeiten* in diesem Kapitel). Als ganze Zahlen bezeichnet man also negative und positive natürliche Zahlen, nicht zu vergessen die Null, die auch »nicht vorhanden« bedeutet: …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …

In der Algebra sind ganze Zahlen sehr beliebt. Wenn man eine lange, komplizierte Aufgabe zu lösen hat und eine ganze Zahl als Ergebnis erhält, kann man sich freuen, da das Ergebnis wahrscheinlich richtig ist. Es ist beispielsweise kein Bruch! Was nicht heißt, dass mathematisch richtige Lösungen nicht auch Brüche oder Dezimalzahlen sein können. Es ist nur so, dass die meisten Übungsbücher mit schönen Lösungen arbeiten, um das Erfolgserlebnis zu verstärken und ein Durcheinander zu vermeiden. Das ist auch meine Absicht für dieses Buch. Wer will schon eine verworrene Antwort – wenngleich das im richtigen Leben öfter der Fall ist. Wenn man keine ganze Zahl als Ergebnis erhält, kann es auch erforderlich sein, auf eine solche zu runden. Das ist vor allem sinnvoll, wenn man mit Beispielen von Menschen, Autos, Tieren, Häusern oder anderem, das man nicht in Stücke teilen sollte, rechnet.

Gerade und ungerade Zahlen

Eine *gerade* Zahl lässt sich durch 2 teilen: 2, 4, 6, 8, … Eine *ungerade* Zahl lässt sich *nicht* durch 2 teilen: 1, 3, 5, 7, … Listet man ganze Zahlen auf, wechseln sich gerade und ungerade Zahlen ab.

Vernünftig sein: Rationale Zahlen

Rationale Zahlen sind vernünftig! Was heißt das? In diesem Fall heißt es, dass sich das dezimale Äquivalent einer rationalen Zahl »vernünftig« verhält. Die Dezimalzahl ist entweder endlich oder periodisch, das heißt, sie endet an irgendeiner Stelle oder die Stellen nach dem Komma wiederholen sich unendlich: 3,4; 5,77623; –4,5 oder $3{,}164164164\ldots = 3{,}\overline{164}$; $0{,}66666666\ldots = 0{,}\overline{6}$. Der waagerechte Strich über der 164 beziehungsweise 6 bezeichnet eine unendliche Wiederholung dieser Zahlen.

Rationale Zahlen können *immer* als Bruch geschrieben werden. Alle haben einen Bruch, dem sie entsprechen. Also lautet eine Definition von rationalen Zahlen: jede Zahl, die als Bruch ausgedrückt werden kann.

Irrationale Zahlen zähmen

Irrationale Zahlen bezeichnen das, was man von ihrem Namen erwartet – das Gegenteil einer rationalen Zahl. Eine irrationale Zahl kann also nicht als Bruch geschrieben werden und ihre Dezimalstellen sind weder endlich noch periodisch. So viel zu irrationalem Verhalten! Die Zahl »Pi« (π) beispielsweise mit ihren niemals endenden Dezimalstellen, ist irrational: 3,141592653589…

Von Ziffern, Fingern und Zehen

Die indisch-arabischen Zahlzeichen, wie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, stammen von den Indern und wurden im Hinblick auf ein dezimales System geschaffen. Das Wort *dezimal* kommt aus dem Lateinischen und heißt »ein Zehntel« oder »der Zehnt«. Das indisch-arabische System ist eine *stellungsabhängige* Schreibweise, das heißt, dass die Reihenfolge der geschriebenen Ziffern eine Rolle spielt. Die Zahl 35 unterscheidet sich von der Zahl 53, da die 3 in 35 für drei Zehner steht und in 53 für drei Einer.

Der Hauptgrund, warum die Menschheit ein dezimales, ein Zehner-System, geschaffen hat, liegt in der Tatsache, dass wir normalerweise zehn Finger und zehn Zehen haben. Es hätte auch ein Zwanziger- oder Fünfer-System, wie das der Babylonier, werden können. Von circa 1700 v. Chr. bis circa 500 n. Chr. rechneten die meisten Mathematiker mit einem Sechziger-System. Auf die Zahl 60 kam man, da ein Jahr in etwa 360 Tage hat und 60 ein Teiler von 360 ist. Überbleibsel dieses frühen Systems finden sich in unseren Minuten und Sekunden wieder. Können Sie sich vorstellen, sich sechzig statt zehn unterschiedliche Ziffern merken zu müssen?

Alle Zeichen dieser frühen Zahlensysteme bedeuteten etwas: eine Sache hiervon, zwei davon und so weiter. Die meiste Zeit gab es keine Ziffer und kein Zeichen für nichts beziehungsweise null. Das erste Zeichen für null (es ähnelt einem auf dem Kopf stehenden »W«) wurde erst 300 v. Chr. eingeführt. Davor ließ man einfach einen leeren Platz, wenn man »nichts« meinte. Manchmal vergaßen Schreiber, diesen Platz zu lassen, manche ließen nicht genug Platz. Außerdem gab es keinen Weg, mehr als eine Null darzustellen.

Variablen variieren

Eine *Variable* bezeichnet einen Buchstaben, der für eine unbekannte Größe oder das, wonach man in einer mathematischen Aufgabe sucht, steht. Eine Variable steht *immer* für eine Zahl.

Die Algebra bedient sich verschiedener Buchstaben, der Variablen, um bestimmte Zahlenwerte darzustellen. Häufig wählt man den Buchstaben so, dass er etwas über die Größe, für die er steht, aussagt.

Die folgende Liste führt die häufigsten Variablen auf.

- ✔ Der Buchstabe *n* wird in der Algebra häufig verwendet. Oft bezeichnet *n* eine unbekannte Größe oder Zahl – vielleicht weil *n* der erste Buchstabe des Wortes »Nummer« ist.