

LERNEN EINFACH GEMACHT



# Höhere Mathematik

für  
**dummies**<sup>®</sup>

Die ein- und mehr-  
dimensionale Analysis  
verstehen

Hauptachsentransformation und  
Euklidische Vektorräume kennen-  
lernen

Fouriertransformationen und  
Differentialgleichungen  
meistern

**Thoralf Räsch**

# Über den Autor

---

**Dr. Thoralf Räsch** studierte Mathematik und Informatik an der Humboldt-Universität zu Berlin und promovierte anschließend an der Universität Potsdam im Bereich der Mathematischen Logik. Zurzeit ist er Akademischer Oberrat am Mathematischen Institut der Universität Bonn und gleichsam Mitglied im dortigen Exzellenzcluster Hausdorff-Center for Mathematics. Er unterrichtet seit vielen Jahren Mathematik in verschiedenen Bachelorstudiengängen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät. Außerdem engagiert er sich schon seit zwei Jahrzehnten in verschiedenen Projekten für Schüler und Schülerinnen zunächst aus dem Berliner und später Bonner Raum, in denen auf unterschiedlichem Wege begeistert in die Welt der Mathematik eingeführt wird. Er rundete sein Spektrum durch Kursleitungen an der Volkshochschule aber auch in der Sommerakademie für Hochbegabte ab. So kennt er die mathematischen Wünsche aber auch die Ängste von Jung und Alt und zeigt in seinen Projekten, dass Mathematik auch Spaß bereiten kann. Diese Projekte sind inhaltlich verständlich und dennoch unterhaltsam motivierend angelegt. Für seine Leistungen in der Lehre wurde er mit dem Preis für MINT-Lehrerbildung der Deutsche Telekom Stiftung sowie dem Lehrpreis der Universität Bonn ausgezeichnet.

## Danksagung

Vor allem danke ich Katrin Sippel, der Frau auf meinem Sofa, die unvorstellbarer Weise nicht gerade grenzenlos in die Mathematik verliebt ist, für die dennoch tapfer ertragenen Gespräche rund um dieses Buch, in denen ich meine Fähigkeit der Motivierbarkeit für mathematische Inhalte bis fast an die für sie erleidbaren Grenzen trainieren kann.

Darüber hinaus danke ich den Mathematikern und Mathematikerinnen Anne Fernengel, Angel Koutev und Peter Rosinsky – alle drei haben im besonderen Maße in Quantität und Qualität dazu beigetragen, dass viele Problemstellen gar nicht erst problematisch wurden und im Keim erstickt werden konnten. Viele kleine und große wichtige Details sind dank dieser fünf ans Tageslicht gekommen.

Mein Dank gilt aber auch den Studierenden Jahr für Jahr in den Bachelorstudiengängen der Physik, Informatik und Mathematik auf Lehramt an der Universität Bonn, die mich immer wieder in meinen Kursen mit ihren Fragen und Anregungen sehr inspirierten. Ich empfinde Lehre als ein großes Geschenk und würde mich freuen, wenn meine Bücher unterstützen und Freude bereiten.

Des Weiteren möchte ich Frau Marianne Hammer-Altmann, sowie Herrn Marcel Ferner und Herrn Patrick Kühnel für die professionelle und unkomplizierte Unterstützung bei der Umsetzung dieses Projekts danken.

Last but not least: Ich danke meiner Mutter für das, was sie war ... und in meinem Herzen bleiben wird.

Thoralf Räsch

# Einleitung

---

Ich freue mich und möchte Ihnen danken, dass Sie sich für dieses Buch entschieden haben – eine wirklich gute Wahl, wie ich finde. Dieses Buch ist für all diejenigen geschrieben, die einen leicht und locker geschriebenen, praxisorientierten Einblick in die »Welt der Höheren Mathematik« genießen wollen. Dieses Buch eignet sich für werdende *Physiker, Chemiker, Biologen, Geowissenschaftler, Informatiker, Ingenieure* aber auch *Mediziner* und selbst reine *Mathematiker* gleichermaßen!

Naturwissenschaftliche Grundlagen benötigen jede Menge Mathematik. Eine gute abstrakte Herangehensweise an die Welt schadet allerdings auch jenseits der MINT-Fächer niemanden und kann durch höhere Mathematik ebenfalls gut trainiert werden. All das finden Sie in diesem Buch und das möglichst leicht verständlich mit vielen Beispielen – das war mein Ziel bei der Zusammenstellung der einzelnen Kapitel.

## *Ein leicht verständlicher Einstieg in die höhere Mathematik anhand von Beispielen*

Verstehen Sie mich nicht falsch: Die Tiefe der Mathematik lernt man, indem man nach dem *Warum?* fragt. Wenn Sie als Mathematikstudent dieses Buch lesen, werden Ihnen in diesem Buch die Beweise und Übungsaufgaben zum Selbststudium fehlen. Das ist nicht das Anliegen dieser Lektüre. Dieses Buch ist für Studierende, speziell für mathematikgrundlagenlastige MINT-Fächer orientierte, geschrieben, die Mathematik in Ihrem Studium anwenden und so viel Mathematik verstehen müssen, dass Sie sich später mit Mathematikern unterhalten können. Das Buch ist für all diejenigen interessant, die naturwissenschaftliche Zusammenhänge verstehen wollen und dafür Mathematik benötigen!

In diesem Buch ist für jeden etwas dabei – ein leicht verständlicher praxisnaher Einstieg sowohl in die Grundlagen der Mathematik als auch in die »Höhere Mathematik« und das Ganze anhand von Beispielen aus der Praxis.

Die ersten Kapitel geben eine solide, aber vielleicht knappe Darstellung der mathematischen Grundlagen. Sollten Sie mehr Tiefe in diesen Grundlagen benötigen, dann könnte Ihnen das Buch *Mathematik für Naturwissenschaftler für Dummies*, ebenfalls erschienen im Verlag Wiley-VCH, helfen. Hier in diesem Buch behandle ich nach einer Einführung für jederman auch die schweren Geschütze der Analysis: Mehrdimensionale Funktionen, komplexe Funktionen, Differentialgleichungen, Vektoranalysis und so weiter und so fort.

Übrigens, jedes der beiden Bücher steht und liest sich für sich. In beiden Büchern zusammen bekommen Sie einen kompetenten Überblick über die gesamte Mathematik von A bis Z, wie sie ein Naturwissenschaftler erleben sollte. So finden Sie die Grundlagen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung im oben genannten anderen Buch.

## *Überall praktische Beispiele*

Beispiele aus dem täglichen (mathematischen) Leben spielen eine wesentliche Rolle in diesem Buch. Sie erkennen die Beispiele im Text durch eine hervorgehobene Einleitung wie »Ein Beispiel« oder »Noch ein Beispiel« oder auch »Und noch ein Beispiel« und so weiter. In diesen Beispielrechnungen sehen Sie, wie Sie praktisch die theoretischen Zusammenhänge anwenden, so dass Sie besser vorbereitet sind, wenn Sie später konkrete Probleme lösen müssen.

Ich gehe sogar noch einen Schritt weiter und das wird vielleicht nicht alle meine Mathematikkollegen erfreuen: Ich werde an einigen Stellen die zu verstehenden Begriffe eher an Beispielen praktisch vorrechnen. Ich verspreche mir davon, dass Sie bei einem gut gewählten Beispiel mehr als nur die konkrete Lösung ablesen können und zusätzlich das allgemeine Prinzip des Vorgehens besser verstehen. Zusätzliche Hinweise werden dann die allgemeine Behandlung abrunden.

Darüber hinaus finden Sie über das gesamte Buch verteilt, immer mal wieder Anwendungen aus verschiedenen Bereichen der Naturwissenschaften, die Ihnen zeigen sollen, wie man die jeweils gerade zu lernende Mathematik im Alltag anwenden kann.

## *Törichte Annahmen über den Leser*

Oder anders ausgedrückt: Für wen ist dieses Buch geschrieben? Zunächst einmal haben Sie sich nicht vom Titel abschrecken lassen – weder von dem Wort »Mathematik« noch von »Dummie«. Ich bin stolz auf Sie, aber es gäbe auch keinen Grund!

Dieses Buch ist geschrieben für ...

- ✓ Studenten und Studentinnen, die mathematisch-naturwissenschaftliche Grundlagen verstehen wollen oder müssen. Dieses Buch gibt Ihnen Ein- und Überblicke und Sie werden nicht genervt mit technischen Details. Sie finden praktische Hinweise und jede Menge Beispiele. Die mathematischen Begriffe werden erklärt und erläutert; insbesondere sehen Sie Querverbindungen und Zusammenhänge.
- ✓ Schüler und Schülerinnen, die an der Mathematik interessiert sind und erste Einblicke in die schillernde Welt der Mathematik bekommen möchten. Sie könnten auch ein/e Schüler/in sein, der/die einen Einblick in die Universitätsmathematik bekommen möchte.

- ✓ Studenten oder Studentinnen, die Mathematik in Ihrem Studienfach haben und ein wenig frustriert von der in der Veranstaltung angegebenen Literatur sind.
- ✓ Leser des ersten Buches *Mathematik für Naturwissenschaftler für Dummies*, erschienen im Verlag Wiley-VCH, die nun tiefer in die »Höhere Mathematik« einsteigen möchten.
- ✓ Interessierte Personen jeden Alters, die einfach Spaß an der Mathematik haben möchten. Beeindrucken Sie Menschen, die es nicht von Ihnen erwarten mit mathematischen Konzepten. Und nebenbei, sollte man sich nicht immer weiterbilden – vielleicht auch gerade mathematisch? So folgen Sie mir auf den Spuren einer der ältesten Wissenschaften...

## Konventionen in diesem Buch

Es gibt nicht viele Regeln für dieses Buch, in die ich Sie vorher einführen müsste. Mir war beim Schreiben des Buches wichtig, dass Sie mit Spaß und einem Lächeln kompetent durch die Mathematik geführt werden. Mathematik kann nämlich Spaß machen und ist keineswegs so trocken, wie oftmals (fälschlicherweise) vermutet. Lassen Sie sich (ver)führen.

Vielleicht ein paar Kleinigkeiten zur Darstellung. Ich werde Sie stark motivieren und Ihnen die Zusammenhänge zum praktischen Leben aufzeigen. Sie werden viele Beispiele erleben und vorgerechnet sehen. Manchmal bitte ich Sie, dies rasch einmal selbst durchzurechnen – ich würde dies nicht als Übungsaufgaben verkaufen wollen, aber das selbstständige Üben ist in der Mathematik ein wesentlicher Bestandteil des Erlernens. Nutzen Sie die Chancen, wenn ich Ihnen diese gebe.

Die Symbole am Rand werden Ihnen helfen, schnell und übersichtlich die wichtigen Passagen zu erkennen. Begriffe und Schlüsselwörter werden *kursiv* gesetzt. So haben Sie alles wichtige immer schnell im Blick.

Nützliche Alltagsbezüge finden Sie in regelmäßigen Abständen in grauen Kästen. Diese dienen der Auflockerung – dort können Sie ein wenig aufatmen und verschnaufen.

## Wie dieses Buch strukturiert ist

Dieses Buch ist in fünf Teile untergliedert. Die jeweiligen Teile sind in kleinere und handliche Portionen, die Kapitel, geteilt, so dass Sie den Stoff besser aufnehmen können. Die angegebenen Teile sind grundsätzlich in analytische und algebraische Themen unterteilt, wobei diese thematisch stark ineinander verwoben sind. Grundlagen der Stochastik, also eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, erhalten Sie in dem Buch *Mathematik für Naturwissenschaftler für Dummies*, erschienen im Verlag Wiley-VCH.