Nach Leibniz‘ Aussage würden also auch die rationalen Zahlen ein Kontinuum darstellen, da zwischen zwei rationalen Zahlen immer eine weitere zu finden ist. Dieser Zusammenhang wird in der modernen Mathematik durch den Begriff der dichten Teilmenge beschrieben:

> Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist dicht in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. $\Leftrightarrow$
> Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$.
>
> Wir wissen sogar, dass es unendlich viele solcher rationalen Zahlen q gibt.[17]

Die Tatsache, dass es bei Leibniz‘ Definition des Kontinuums Zahlen wie beispielsweise π nicht in das Kontinuum integriert werden können, hat ihn zu weiteren Auseinandersetzungen mit dem Thema veranlasst und schon nach wenigen Jahren konnte er seine Theorie der Indivisibilen durch eine Theorie der unendlich kleinen Größen – der Infinitesimalen – widerlegen: Nun ist er der Auffassung, dass das Kontinuum nicht aus Punkten zusammengesetzt ist, sondern dass es ist ein Ganzes ist, das in Punkte zerlegt werden kann, die aber ihrerseits wieder von der Natur des Kontinuums, also unendlich teilbar, sind.[18]

Vor dem Hintergrund seines Kontinuumbegriffs betrachtet Leibniz eine Kurve nun als ein Polygon mit infinitesimalen Kantenlängen, was es ihm ermöglicht, die Steigung der Tangenten an einem beliebigen Punkt einer Kurve mit Hilfe des Steigungsdreiecks zu bestimmen: Die Differential- und Integralrechnung, zu deren Gründervätern neben Leibniz auch der englische Naturforscher Isaac Newton zählt, hielt nun als wirkmächtiges Instrument, um Funktionen zu untersuchen, Einzug in die Mathematik.

Leibniz‘ Umgang mit unendlichen Größen galt jedoch in der mathematischen Diskussion keineswegs als unumstritten: Im Jahr 1734 veröffentlichte der englische Bischof Georg Berkeley seine Kampfschrift *The Analyst*, die den Untertitel *gerichtet an den treulosen Mathematiker* trug. Berkeleys Kritik bezieht sich auf die Ableitung von $f(x) = x^2$ und dem unbedachten Umgang Leibniz‘ bei deren

---

[17] Der Beweis ist u. a. nachzulesen in: Daniel Grieser, *Analysis I. Eine Einführung in die Mathematik des Kontinuums*, Springer Spektrum, Wiesbaden 2015:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$. Sei dann k die kleinste ganze Zahl, für die gilt: $\frac{k}{n} > a$. Ein solches k existiert, denn die Menge $M = \left\{k \in \mathbb{Z} | \frac{k}{n} > a\right\}$ ist nach unten beschränkt: $k \in M \Rightarrow k > na$.

Nach Definition von k gilt $a < \frac{k}{n}$, es bleibt also zu zeigen, dass $\frac{k}{n} < b$. Wäre $\frac{k}{n} \geq b$, so folgt $\frac{k-1}{n} = \frac{k}{n} - \frac{1}{n} \geq b - \frac{1}{n} > a$, wobei die letzte Ungleichung durch Umstellung aus $b - a > \frac{1}{n}$ folgt. Die Ungleichung $\frac{k-1}{n} > a$ steht aber im Widerspruch zur Minimalität von k. Also folgt $\frac{k}{n} < b$.

[18] Vgl. Breger 2016, S. 119.

Berechnung, die folgendermaßen lautet:

$$f'(x) = \frac{(x+\Delta)^2 - x^2}{(x+\Delta) - \mathrm{x}} = \frac{x^2 + 2x\Delta + \Delta^2 - x^2}{(x+\Delta) - \mathrm{x}} = \frac{2x\Delta + \Delta^2}{\Delta} = \frac{2x + \Delta}{1} = 2x$$

Berkeley merkt an, dass der unendlich kleine Ausdruck Δ zunächst als endliche Größe betrachtet wird, da man sonst im dritten Term durch Null dividieren würde. Anschließend, kritisiert Berkeley, werde der gleiche Ausdruck Δ in nur einem Rechenschritt später wie eine Null behandelt. Dieser Umgang mit infinitesimalen Größen, so der Bischof, sei mathematisch nicht zu rechtfertigen.[19]

Diese und ähnliche Fragen führen im gelehrten Europa des 17. und 18. Jahrhunderts zu heftigen Diskussionen. Bereits 100 Jahre später jedoch hat die „Analysis den Umgang mit der Unendlichkeit gelernt“[20] und die Früchte der Auseinandersetzungen sorgen für völlig neue Perspektiven auf die Unendlichkeit in der Mathematik.

2.1.3 Der Forschungsstand zur Unendlichkeit im 19. Jahrhundert

Im 19. Jahrhundert erreicht die Diskussion, ob die Unendlichkeit als aktuales oder potentielles Phänomen betrachtet werden soll, ihren Höhepunkt, indem sich zwei mathematische Ideologien und dazugehörige Lager bilden, die leidenschaftlich um ihre verschiedenen Standpunkte kämpfen:

Zum einen begründen die sogenannten Finitisten eine neue Schule der Analysis, in der sie ausdrücklich vor dem Einzug des aktual Unendlichen in der Mathematik warnen. Zu ihren Vertretern gehören unter anderem das sogenannte „Triumvirat“ Kronecker, Kummer und Weierstraß: Sie versuchen, die Untiefen der Unendlichkeit zu umschiffen, indem sie beliebig – aber nicht unendlich – kleine bzw. große Größen betrachten.

Im Rahmen dieses Vorhabens wird der Begriff des Grenzwertes unter Bezugnahme auf den Folgebegriff formalisiert. Im Jahr 1821 erscheint das Lehrbuch *Cours d'Analyse* von Augustin-Louis Cauchy, das dem Grenzwertbegriff dazu verhilft, zu einem Grundbegriff der Analysis zu werden. Cauchy erklärt den Begriff einer Grenze folgendermaßen:

---

[19] Vgl. *Panorama der Mathematik*, S. 144.

[20] Vgl. *Panorama der Mathematik*, S. 146.

> „Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die Grenze aller übrigen.“[21]

Dieser Definition liegt das Prinzip zugrunde, dass zunächst eine Aussage in der Endlichkeit formuliert wird und diese anschließend im Rahmen eines dynamischen Prozesses auf eine potentiell vorliegende Unendlichkeit ausgedehnt wird. Die Existenz einer Menge von unendlich vielen Elementen wird hier in keinem Moment vorausgesetzt oder benötigt.

Im Rahmen der großen Formalisierungswelle der Mathematik im ausgehenden 19. Jahrhundert wird die bis dahin naive, intuitiv geprägte Analysis auf ein systematisches und stärker formal orientiertes Fundament gestellt. Diese Entwicklung führt zu der heute üblichen Definition des Grenzwertes einer Folge:

> Für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt $A \in \mathbb{R}$ Grenzwert dieser Folge, wenn gilt:
>
> Für alle $> 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ gilt: $|A - a_n| < \epsilon$.

Aufbauend auf diese „ϵ-n_0-Definition“ wird einige Jahre später auch das ε-δ-Kalkül[22] Einzug in die Mathematik halten, und auch dieses formuliert eine Aussage in der Endlichkeit, die dann auf eine potentielle Unendlichkeit ausgedehnt wird.

Parallel zu den Bestrebungen der Finitisten bildet sich eine Gruppe von Mathematikern, die die Existenz einer aktualen Unendlichkeit in der Mathematik zum Fundament ihrer Arbeit machen – der Begründung der Mengentheorie.

Hier ist neben Richard Dedekind und Bernhard Bolzano vor allem der Name des deutschen Mathematikers Georg Cantor zu nennen, der als „Schöpfer der Mengenlehre“ in die Mathematikgeschichte eingegangen ist und dessen Arbeit es gelang, was allen wissenschaftlichen Fortschritts zum Trotz zuvor nicht

[21] *Didaktik d. Analysis,* S. 77.

[22] Das ε-δ-Kalkül wird in der modernen Analysis unter anderem verwendet, um die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt oder in einer Teilmenge zu zeigen: Man betrachte eine Teilmenge E von $\mathbb{R}$ sowie die Funktion $\mathrm{f} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$. Man betrachte außerdem den Häufungspunkt x, d. h. es existiert eine Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in E, x_n \to x$ für $n \to \infty$ und es gilt außerdem, dass $\mathrm{x_n} \neq \mathrm{x}$. Eine Funktion f heißt **stetig in einem Punkt** $x \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $t \in T$ mit $|t - x| \leq \delta$. Man sagt auch $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$. Eine Funktion f heißt **stetig in E**, falls für alle $x \in X$ stetig ist.

erreicht wurde: „Die Schaffung einer einheitlichen Grundlage, auf der sich die Mathematik als Ganzes errichten lässt.“[23]

Im Folgenden werde ich drei der zahlreichen Sätze über die Zahlenmengen von Cantor sowie die dazugehörigen Beweise darlegen. Dafür möchte ich jedoch zuvor einige zentralen Begriffe definieren, um sie später exakt einsetzen zu können.

2.1.4 Einschub: Klärung zentraler Begriffe

Seit dem ausgehenden 19. Jahrhundert spielt der Begriff der Zuordnung eine zentrale Rolle, um Funktionen zu beschreiben: Im Rahmen der aufkommenden Mengentheorie ist eine Funktion nun auf einer Definitionsmenge A definiert, ihre Funktionswerte entstammen einer Wertemenge B. Die Zuordnung erfolgt über das mathematische Konstrukt des kartesischen Produktes $A \times B$ und wird in Wertpaaren (x, y) ausgedrückt, wobei für $x \epsilon A$ und und für $y \epsilon B$ gilt.

Mit diesem Werkzeug lassen sich nun funktionale Beziehungen zwischen verschiedenen Mengen herstellen. Cantor arbeitet mit dem Begriff der Eineindeutigkeit (heute: Bijektivität) einer Funktion, um einen Begriff zu etablieren, der einen neuen Blick auf die Mengenlehre ermöglicht und sie mit dem Funktionsbegriff verknüpft: Die Mächtigkeit (oder Kardinalität) einer Menge.

Ich werde in den folgenden Absätzen die gerade verwendeten Begriffe sowie weitere Grundbegriffe, auf die ich zurückkommen werde, definieren und beginne mit einer Definition der **Funktion** in der modernen Mathematik:

Seien X und Y beliebige, nicht leere Mengen. Eine Funktion ist auf X mit Werten in Y definiert, wenn aufgrund einer Regel[24] f jedem Element $x \in X$ ein Element $y \in Y$ zugehörig ist.

Die Menge X heißt Definitionsbereich D_f der Funktion, wobei $x \in X$ ein allgemeines Element der Menge beschreibt und Argument genannt wird. Das

---

[23] Dirk W. Hoffmann, *Grenzen der Mathematik. Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik*, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2018[3], S. 13.

[24] Um den Begriff der *Regel* exakt zu erklären, benutzt Vladimir A. Zorich in *Analysis I* (Springer, Heidelberg 2006) das mathematische Konstrukt der Relation: Er definiert eine Relation $\mathcal{R}$ als eine Menge geordneter Paare (x, y), wobei die Menge X der ersten Elemente der geordneten Paare, die $\mathcal{R}$ bilden, Definitionsbereich von $\mathcal{R}$ genannt und die Menge Y der zweiten Elemente dieser geordneten Paare der Wertebereich von $\mathcal{R}$ genannt wird. Daher kann eine Relation als eine Teilmenge $\mathcal{R}$ des direkten Produkts $X \times Y$ betrachtet werden. $\mathcal{R}$ wird funktional genannt, falls gilt: $(x, y_1) \wedge (x, y_2) \Rightarrow (y_1 = y_2)$. Eine funktionale Relation wird als Funktion bezeichnet.

Element $y_0 \in Y$, das einem Element $x_0 \in X$ zugeordnet wird, wird Wert der Funktion in x_0 oder auch Bild von x_0 genannt und $f(x_0)$ geschrieben.

Die Menge $f(X) := \{y \in Y | \exists x((x \in X) \wedge (y = f(x))\}$, die alle Werte von f beinhaltet, wird Wertebereich W_f oder Bild der Funktion genannt.[25]

Eine Funktion $f : X \to Y$ wird

- *surjektiv* genannt, falls gilt: $f(X) = Y$.
- *injektiv* genannt, falls je für zwei Elemente x_1 und $x_2 \in X$ gilt: $(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$.
- *bijektiv* genannt, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist.[26]

Wenn eine Funktion $f : X \to Y$ bijektiv ist, existiert eine eindeutige Abbildung zwischen den Mengen X und Y. Daraus folgt, dass eine Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ existiert. Sie wird definiert durch die Zuordnung $f^{-1}(y) = x$, also wird in diesem Falle jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ zugeordnet. Das ist zulässig, weil aufgrund der Surjektivität von f ein solches Element existiert und es aufgrund der Injektivität von f eindeutig ist.

Diese Abbildung f^{-1} wird die Umkehrfunktion oder die Inverse der Abbildung f genannt.

Nun wende ich mich dem Begriff der **Kardinalität** einer Menge zu und definiere ihn:

Sei M eine Menge. Die Kardinalität von M, bezeichnet als $|M|$, entspricht der Anzahl der Elemente einer Menge.

Eine Menge M ist endlich mit Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}_0$, falls es eine Bijektion $M \to \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt.

Im Fall M=∅ gilt: $n = 0$.

Eine Menge M ist unendlich, wenn sie nicht endlich ist.

Seien M_1 und M_2 beliebige Mengen. M_1 und M_2 heißen *gleichmächtig*, geschrieben als $|M_1| = |M_2|$, wenn eine bijektive Abbildung $f : M_1 \to M_2$ existiert.

Bemerkung: Zwei unendliche Mengen sind per Definition genau dann gleichmächtig, wenn sich ihre Elemente jeweils umkehrbar eindeutig einander zuordnen lassen.[27]

---

[25] Vgl. Zorich 2006, S. 11.

[26] Vgl. Zorich 2006, S. 17.

[27] Hoffmann 2018, S. 15.