1.3 Multiplikation und Division rationaler Zahlen

Rechenregeln für Multiplikation und Division

Auch in diesem Abschnitt steht das Rechen mit *negativen* Zahlen im Vordergrund, da die Regeln für das Multiplizieren und Dividieren von *positiven* rationalen Zahlen in der Schule im Rahmen der Bruchrechnung ausführlich behandelt und geübt werden.

Die Regeln für das Multiplizieren und Dividieren mit negativen Zahlen lassen sich auf 4 Fälle reduzieren, die in den folgenden Tabellen aufgeführt sind. Begründungen und Plausibilitätsbetrachtungen für die Regeln folgen auf der nächsten Seite.

1. Faktor	2. Faktor	Produkt	Beispiel
+	+	+	$(+5) \cdot (+3) = (+15)$
–	+	–	$(-5) \cdot (+3) = (-15)$
+	–	–	$(+5) \cdot (-3) = (-15)$
–	–	+	$(-5) \cdot (-3) = (+15)$

Für die Division zweier Zahlen gelten dieselben Regeln wie für die Multiplikation.

Dividend	Divisor	Quotient	Beispiel
+	+	+	$(+6) : (+3) = (+2)$
–	+	–	$(-6) : (+3) = (-2)$
+	–	–	$(+6) : (-3) = (-2)$
–	–	+	$(-6) : (-3) = (+2)$

Die Regeln für Multiplikation und Division entsprechen sich. Die Begründung für diese Entsprechung ist einfach: Man kann jede Division als Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors auffassen. Also gelten für die Vorzeichen dieselben Regeln.

Beispiele: $(+6) : (+3) = (+6) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = (+2)$ $\quad (+6) : (-3) = (+6) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = (-2)$

Division durch 0

Zur Erinnerung: Durch 0 kann man nicht dividieren.
Beispiele: $7 : 0$; $0 : 0$; $\frac{3}{0}$; $\frac{0}{0}$ Alle diese Rechenausdrücke sind nicht definiert.
Warum dies so ist, wird mit Hilfe der jeweiligen Umkehraufgabe an Beispielen erklärt.

Zu $6 : 2 = 3$ heißt die Umkehraufgabe: $6 = 3 \cdot 2$.

Zu $6 : 0 = x$ heißt die Umkehraufgabe: $6 = x \cdot 0$. Es gibt keine rationale Zahl x, die, wenn man sie mit 0 multipliziert, 6 ergibt. Deshalb ist die Division $6 : 0$ nicht möglich.

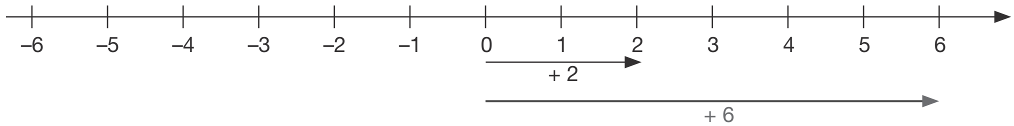
Zu $0 : 0 = y$ heißt die Umkehraufgabe: $0 = y \cdot 0$. y könnte jede rationale Zahl sein. y ist nicht eindeutig. Deshalb ist die Division $0 : 0$ nicht zugelassen.

Begründungen für die Regeln zur Multiplikation negativer Zahlen

Wenn Sie wissen wollen, wie man auf die oben angegebenen Multiplikationsregeln für negative Zahlen kommt, finden Sie im Folgenden eine Begründung und eine Plausibilitätsbetrachtung. Wenn Sie sich aber vor allem für das Anwenden und Üben der Regeln, die in den Tabellen angegeben sind, interessieren, können Sie sich jetzt die Übungen am Ende dieses Abschnitts vornehmen und diesen Abschnitt übergehen.

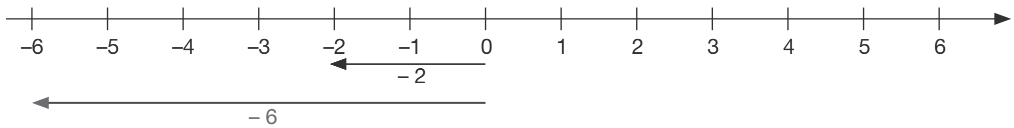
Wie kommt man bei der Multiplikation mit negativen Zahlen zu dem Vorzeichen des Ergebnisses? Zur Erklärung der Vorzeichenregeln bedienen wir uns wieder der Zahlengeraden.

(+2) · (+3) = (+6)
Man fasst den ersten Faktor als Pfeil auf und den zweiten als Streckfaktor. Das heißt, der Pfeil (+2) wird auf das Dreifache gestreckt.

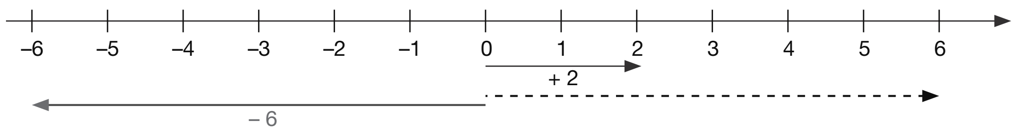


Diese Regel wird auf negative Zahlen übertragen. Der Pfeil (–2) wird auch auf das Dreifache gestreckt.

(–2) · (+3) = (–6)

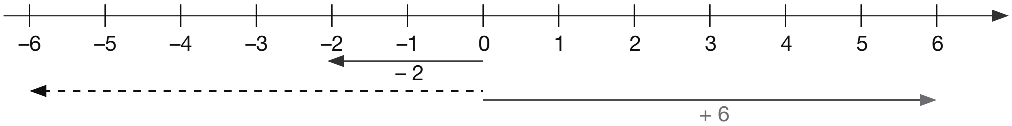


(+2) · (–3) = (–6)
In der Geometrie wird ein negativer Streckfaktor so interpretiert: Der Pfeil wird zuerst gestreckt und dann am Streckzentrum (das ist hier der Nullpunkt) gespiegelt.



Das Ergebnis (–6) passt auch gut zu folgender Überlegung: Man kann doch in einem Produkt die beiden Faktoren vertauschen, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Das nennt man das Kommutativgesetz. Dieses Gesetz soll für alle rationalen Zahlen gelten. Also ist (+2) · (–3) = (–3) · (+2). Die rechte Seite der Gleichung besagt: Der Pfeil (–3) wird auf das Doppelte gestreckt. Dies ergibt (–6).

(–2) · (–3) = (+6)
Wenden wir jetzt konsequent die im letzten Beispiel aufgestellte Regel an, so heißt dies: Pfeil (–2) auf das Dreifache strecken und dann am Nullpunkt spiegeln. Dies ergibt (+6).



Dieses Ergebnis ist für Viele unverständlich. Minus mal minus soll plus ergeben? Bitte beachten Sie: Es heißt nicht „minus *plus* minus gleich plus“. Natürlich ergibt minus *plus* minus (salopp gesagt) noch mehr minus (siehe Abschnitt 1.2).

Leider gibt es im Alltag kein überzeugendes Beispiel, in dem zwei negative Zahlen miteinander *multipliziert* werden. In Physik und Technik kommt aber diese Regel zum Beispiel im Zusammenhang mit der Multiplikation von Vektoren zur Anwendung. Dort bringt die Regel vernünftige Ergebnisse.

Vielleicht ist auch folgende kleine **Plausibilitätsbetrachtung**, die früher oft in Schulbüchern zu finden war, hilfreich. Man bildet geeignete Folgen von Produkten. Dies wird jetzt an zwei Beispielen gezeigt.

(+2) · (+3) = (+6)	(–2) · (+3) = (–6)
(+2) · (+2) = (+4)	(–2) · (+2) = (–4)
(+2) · (+1) = (+2)	(–2) · (+1) = (–2)
(+2) · 0 = 0	(–2) · 0 = 0

Man setzt die Folgen sinngemäß fort.

(+2) · (–1) = (–2)	(–2) · (–1) = (+2)
(+2) · (–2) = (–4)	(–2) · (–2) = (+4)
(+2) · (–3) = (–6)	(–2) · (–3) = (+6)

Vielleicht trägt diese Überlegung dazu bei, dass Sie die Regel „minus mal minus gleich plus“ wenigstens für innermathematisch vernünftig halten.

Aufgaben zu 1.3

1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:
a) (–8,2) · (–2) b) (+4,5) · (–2) · (–5) c) 3 · (–8) · 5 d) (–5 + 9) · (–3)
e) –5 + 9 · (–3) f) –5 – 9 · 3 g) (5 – 9 + 4) · (–7)

2. Berechnen Sie ohne Taschenrechner. Welche Aufgaben haben keine Lösung?
a) (–8,2) : (–2) b) 5 : (–2,5) c) 0 : (–3)
d) (–3) : 0 e) (–3) · 0 f) (–3) : 6

1.4 Schnittmenge und Vereinigungsmenge

Die Begriffe Schnittmenge und Vereinigungsmenge werden in den folgenden Lektionen wiederholt verwendet, um Sachverhalte mathematisch klar und eindeutig zu beschreiben. Die beiden Begriffe werden deshalb im Telekolleg Mathematik zu den Grundkenntnissen gezählt.

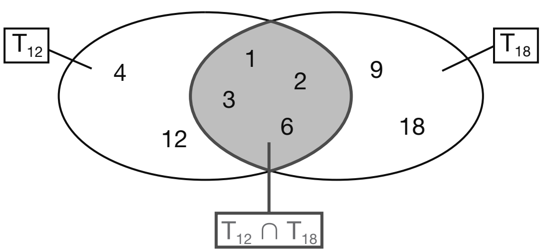
Schnittmenge

Durch welche Zahlen ist eine vorgegebene Zahl, z. B. 12, teilbar? Antwort in Mengenschreibweise: {1, 2, 3, 4, 6, 12}. Man nennt diese Zahlen „Teiler von 12“. Wir bezeichnen die Menge der Teiler von 12 mit T_{12}.
Sind *zwei* Zahlen gegeben und die Teiler jeder dieser Zahlen gesucht, z. B. die Teiler von 12 und die Teiler von 18, so fragt man gelegentlich nach den *gemeinsamen* Teilern der beiden Zahlen.
$T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ $T_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
Die *gemeinsamen* Teiler von 12 und von 18 sind {1, 2, 3, 6}. Die Menge der gemeinsamen Teiler ist ein Beispiel für eine Schnittmenge.

Die **Schnittmenge** zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die zu A und zu B gehören.
Schreibweise: $A \cap B$; gelesen: A geschnitten mit B

In unserem Beispiel heißt das: $T_{12} \cap T_{18} = \{1, 2, 3, 6\}$.

Häufig veranschaulicht man die beiden Mengen und ihre Schnittmenge auch durch ein Mengenbild.



Leere Menge

Enthalten die beiden Mengen kein gemeinsames Element, so sagt man: Die Schnittmenge ist leer.
Das Symbol für die leere Menge ist: { }.

Beispiel:
A enthält alle geraden Zahlen zwischen 1 und 10. $A = \{2, 4, 6, 8\}$
B enthält alle ungeraden Zahlen zwischen 1 und 10. $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
Die Schnittmenge ist die leere Menge. $A \cap B = \{ \}$

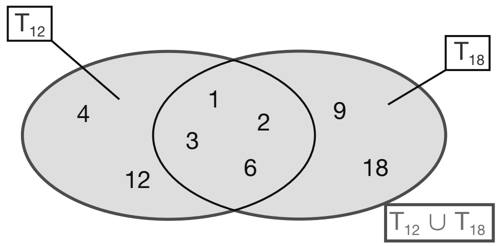
Vereinigungsmenge

Will man wissen, welche Zahlen Teiler von 12 *oder* von 18 sind, so heißt die Antwort: {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18}. Diese Zahlen sind also entweder Teiler von 12 oder Teiler von 18 oder Teiler von beiden.

Die **Vereinigungsmenge** zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden gehören.
Schreibweise: $A \cup B$; gelesen: A vereinigt mit B

In unserem Beispiel heißt das:
$T_{12} \cup T_{18} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$.

Im Mengenbild umfasst die Vereinigungsmenge beide Mengen: T_{12} und T_{18}.



Aufgaben zu 1.4

1. A = {1, 3, 4, 7, 9, 12, 14, 23} B = {2, 3, 5, 7, 8, 14, 22} C = {1, 4, 6, 9, 13, 15, 23}
Bilden Sie mit den angegebenen Mengen A, B, C folgende Schnitt- und Vereinigungsmengen: $A \cap B$; $A \cap C$; $A \cup C$; $A \cup B$; $B \cap C$; $B \cup C$

2. A: Menge der natürlichen Zahlen, die größer als 3 und kleiner als 12 sind.
B: Menge der Primzahlen, die kleiner als 30 sind.
C: Menge der ganzen Zahlen, die größer als –5 und kleiner als 12 sind.
D: Menge aller ganzen negativen Zahlen.
Bilden Sie mit den angegebenen Mengen A, B, C, D folgende Schnitt- und Vereinigungsmengen:
$A \cap B$; $B \cap C$; $C \cap D$; $A \cup B$; $A \cap D$; $A \cup C$

3. Geben Sie folgende Schnittmenge und Vereinigungsmenge möglichst einfach an:
a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$ b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$