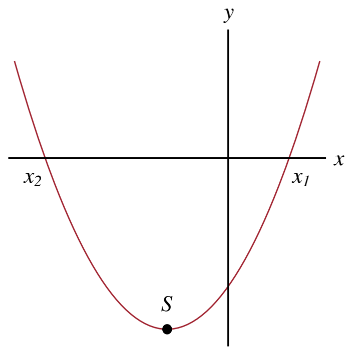
Kerstin Rjasanowa

Mathematik für Bauingenieure

Aufgaben und Lösungswege

HANSER

Quadratische Funktion



	$f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$	$f(x)=x^2+px+q$, $p,q\in\mathbb{R}$
$f:$	$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Diskriminante	$D=b^2-4ac$	$D=p^2/4-q$
Nullstellen		
$D>0$	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$
$D=0$	$x_{1,2}=-b/(2a)$	$x_{1,2}=-p/2$
$D<0$	keine reelle	keine reelle
Wurzelsatz von Vieta	$x_1+x_2=-b/a$ $x_1x_2=c/a$	$x_1+x_2=-p$ $x_1x_2=q$
Scheitelpunkt	$S\left(-\dfrac{b}{2a},c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$	$S\left(-\dfrac{p}{2},q-\dfrac{p^2}{4}\right)$

Polynom

$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ $P_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ a_i\in\mathbb{R},\ i=0,\dots,n,\ a_n\neq 0$

$x^*\in\mathbb{R},\ b_{n-1}=a_n,$
$b_{i-1}=b_ix^*+a_i,\ i=1,\dots,n-1$
$P_n(x^*)=b_0x^*+a_0$
$P_{n-1}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i$

Nullstellen	r Nullstellen $x_k\in\mathbb{R},\ r\leq n,\ k=1,\dots,r$
Linearfaktor-zerlegung	$P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_r)P_{n-r}(x)$, P_{n-r} - Polynom ohne reelle Nullstellen
Horner-Schema	$\begin{array}{cccccccc\|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \\ x^* & \downarrow & x^*b_{n-1} & x^*b_{n-2} & & x^*b_2 & x^*b_1 & x^*b_0 & + \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & & b_1 & b_0 & P_n(x^*) & \end{array}$
Polynomdivision	$P_n(x)=(x-x^*)P_{n-1}(x)+P_n(x^*)$

Rationale Funktion

$f(x)=\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ P_m(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$

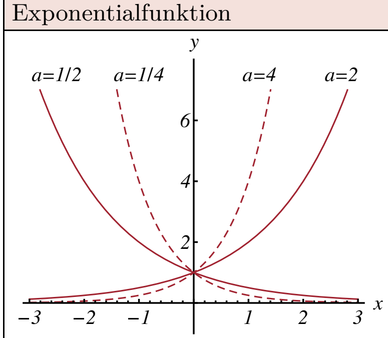
$a_i\in\mathbb{R},\ i=0,\dots,n,\ b_j\in\mathbb{R},\ j=0,\dots,m,\ a_n,b_m\neq 0$
x verschieden von den Nullstellen von P_m

x_0 - k-fache Nullstelle von P_n und l-fache Nullstelle von P_m, $k,l=0,1,2,\dots$

Nullstelle x_0	wenn $k>0,\ l=0\ (x_0\in D_f)$
Polstelle x_0	wenn $k<l\ (x_0\notin D_f)$
Lücke x_0	wenn $k\geq l>0\ (x_0\notin D_f)$

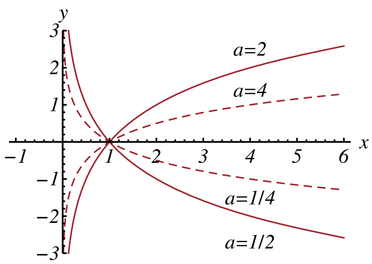
Exponentialfunktion

$f(x)=a^x$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ a\in\mathbb{R},\ a>0,\ a\neq 1$



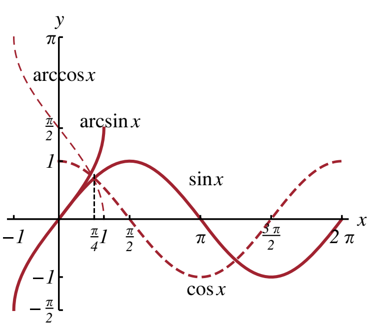
natürliche Basis	$f(x)=\mathrm{e}^x$
Euler-Zahl	$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
	$\mathrm{e}=2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\dots$
Potenzgesetze	$a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$ $\quad a^{x_1}/a^{x_2}=a^{x_1-x_2}$ $(ab)^x=a^xb^x$ $\quad (a/b)^x=a^x/b^x$ $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$ $a^{-x}=1/a^x=(1/a)^x$

Logarithmusfunktion	$f(x) = \log_a x$	$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$
	$\log_{10} x = \lg x$	$\log_e x = \ln x$



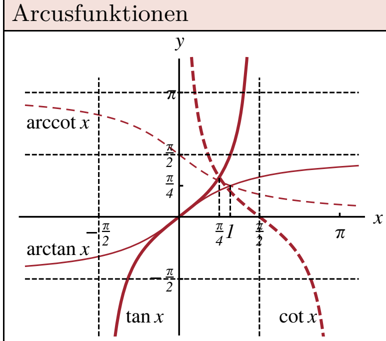
Definition	$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$
Nullstelle	$x_N = 1$, d. h. $\log_a 1 = 0$
Produkt	$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
Quotient	$\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$
Exponent	$a^{\log_a b} = b$
Potenz	$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$
Wechsel der Basis	$\log_a b = \log_c b / \log_c a$
Identität	$\log_a a = 1$

Trigonometrische Funktionen	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$
Arcusfunktionen	$f(x) = \arcsin x$	$f(x) = \arccos x,\ k \in \mathbb{Z}$



	$\sin x$	$\cos x$
$f:$	$\mathbb{R} \to [-1, 1]$	$\mathbb{R} \to [-1, 1]$
Periode	$\sin x = \sin(x + 2k\pi)$	$\cos x = \cos(x + 2k\pi)$
Nullstellen	$x_N = k\pi$	$x_N = \pi/2 + k\pi$
Symmetrie	$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$
Definition	$\Longrightarrow x = \sin y$	$\Longrightarrow x = \cos y$
$f:$	$[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1] \to [0, \pi]$
Nullstellen	$x_N = 0$	$x_N = 1$
Symmetrie	$\arcsin(-x) = -\arcsin x$	$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

Trigonometrische Funktionen	$f(x) = \tan x$	$f(x) = \cot x$
Arcusfunktionen	$f(x) = \arctan x$	$f(x) = \operatorname{arccot} x,\ k \in \mathbb{Z}$



	$\tan x$	$\cot x$
$f:$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\} \to \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \to \mathbb{R}$
Periode	$\tan x = \tan(x + k\pi)$	$\cot x = \cot(x + k\pi)$
Nullstellen	$x_N = k\pi$	$x_N = \pi/2 + k\pi$
Symmetrie	$\tan(-x) = -\tan x$	$\cot(-x) = -\cot x$
	$y = \arctan x$	$y = \operatorname{arccot} x$
Definition	$\Longrightarrow x = \tan y$	$\Longrightarrow x = \cot y$
$f:$	$\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$	$\mathbb{R} \to (0, \pi)$
Nullstellen	$x_N = 0$	keine
Symmetrie	$\arctan(-x) = -\arctan x$	$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$

Monotonie, Beschränktheit, Umkehrfunktion

2.1 Die Graphen folgender Funktionen sind zu entwerfen:

a) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **b)** $y = f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

c) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

2.2 Gesucht sind Definitionsbereich und Wertebereich sowie die Graphen folgender Funktionen:

a) $y = f(x) = \sqrt{-2x-3}$

b) $y = f(x) = \sqrt{(a-x)(b-x)}$,
zu diskutieren ist $a \neq b$ und $a = b$.

2.3 Sind folgende Zuordnungen Funktionen?

a) $y = f(x) = \begin{cases} x, & x^2 = x \\ 2, & x \neq 0 \end{cases}$

b) $y = f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

2.4 Das Monotonieverhalten folgender Funktionen ist zu untersuchen:

a) $y = f(x) = ax$ **b)** $y = f(x) = ax^2$

c) $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{5x+4}+4}$, $x \geq -\dfrac{4}{5}$

d) $y = f(x) = x - \sqrt{x^2-4}$, $x \geq 2$

2.5 Ist die Funktion $y = x^4$

a) im Intervall $0 \leq x < +\infty$,
b) im Intervall $-\infty < x \leq 0$,
c) im Intervall $-\infty < x < +\infty$,
d) im Intervall $-2 \leq x \leq 1$

umkehrbar? Wie lautet gegebenenfalls jeweils die Formel für die Umkehrfunktion? Auf welchem Intervall ist die Umkehrfunktion definiert?

Lineare Funktionen, Betragsfunktion

2.6 Folgende lineare Gleichungen bzw. Gleichungen, die sich auf lineare zurückführen lassen, sind zu lösen:

a) $\dfrac{3x-4}{5} - \dfrac{3-4x}{7} = \dfrac{5x-6}{10} - \dfrac{9-10x}{14}$

b) $\dfrac{7}{3} + \dfrac{13}{5x} = \dfrac{13x-24}{3x} - \dfrac{37}{20} + \dfrac{10}{x}$

c) $\dfrac{2x+1}{3x-15} - \dfrac{x-11}{2x-10} = 1$

d) $(x-3)(x-4) = (x-6)(x-2)$

e) $ab + (b+1)x = (a+x)b + a$

f) $(a+bx)(a-b) - (ax-b)(a+b) = ab(x+1)$

g) $(a+b)x + (a-b)x - ax = b + c$

h) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right\}-1\right)-1 = 0$

i) $\dfrac{a-x}{bc} + \dfrac{b-x}{ac} + \dfrac{c-x}{ab} = 0$

j) $\dfrac{2x^n + 7x^{(n-1)}}{9} + \dfrac{7x^n - 44x^{(n-1)}}{5x-14}$
$= \dfrac{4x^n + 27x^{(n-1)}}{18}$

k) $\dfrac{x-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \dfrac{x-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \dfrac{x-\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 3$

l) $\dfrac{a}{b}(a-x) + \dfrac{a}{c}(b-x) + \dfrac{c^2-ax}{a} + \dfrac{ab-cx}{b}$
$= \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{c^2}{a}$

m) $(2\sqrt{x}+3)(2\sqrt{x}-3) = 7$

n) $\sqrt{7x+2} = \dfrac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

o) $\sqrt{14-x} + \sqrt{11-x} = \dfrac{3}{\sqrt{11-x}}$

p) $\left(\sqrt{a\sqrt{b}} - \sqrt{b\sqrt{a}}\right) = a\sqrt{b\sqrt{x}} - b\sqrt{a\sqrt{x}}$

q) $\sqrt{a^{7-3x}} \cdot \sqrt[3]{a^{x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{5x-7}} \cdot \sqrt[5]{a^{7-2x}} = 1$

r) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x = \left(\dfrac{4}{3}\right)^7$

2.7 Zu bestimmen sind alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Gleichungen erfüllt sind:

a) $\left|\dfrac{3}{2}x - 2\right| = \dfrac{5}{2}$ **b)** $|2x+1| - |x-1| - 1 = 0$

c) $||x+1| - |x+3|| = 1$

2.8 Zu bestimmen sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen gelten:

a) $|3x-9| \geq 1$ **b)** $|x+1| - 4 < 0$

c) $|x| + |x-2| < 5$

2.9 Die Menge aller Punkte (x, y) mit $|x| + |y| = 1$ ist im kartesischen Koordinatensystem (O, x, y) darzustellen.

2.10 Eine Baustelle wird von einer 4 km entfernten Mischzentrale mit Transportbeton beliefert. Der eingesetzte Mischtransporter fährt im Pendelverkehr leer mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h und beladen mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h. Die Übernahme des Mischgutes dauert 6 min, das Entleeren auf der Baustelle 4 min. Wie viel Fahrten können bis zur Frühstückspause durchgeführt werden, wenn die Abfahrt um 6.15 Uhr vom Betonwerk erfolgt und die Frühstückspause gegen 9.00 Uhr im Betonwerk stattfinden soll? Vor der Pause muss eine gründliche Reinigung des Fahrzeugs von Betonresten erfolgen, wofür 15 min in Rechnung gestellt werden.

2.11 Um eine wichtige Durchgangsstraße nach einem Erdrutsch wieder freizumachen, werden drei Bagger eingesetzt. Das erste Fahrzeug würde das Geröll in 27 Tagen, das zweite in 36 Tagen und das dritte in 54 Tagen wegschaffen.

a) Wie lange benötigen alle drei Bagger gemeinsam für diese Arbeit?

b) Wie lange dauern die Aufräumungsarbeiten, wenn der zweite Bagger erst am zweiten Tag und der dritte Bagger erst am vierten Tag eingesetzt werden kann?

2.12 Vier Gipser sind mit dem Verputzen einer Hausfassade beschäftigt. Gipser A würde die Fassade allein in 12 Tagen, B in 14, C in 30 und D in 18 Tagen verputzen. In welcher Zeit wird die Arbeit fertiggestellt, wenn alle vier gemeinsam arbeiten?

2.13 Ein Becken einer Kläranlage kann durch drei Abflussrohre geleert werden, durch das erste in zwei, das zweite in drei und das dritte in sechs Stunden In welcher Zeit wird das Becken geleert sein, wenn das Wasser durch alle drei Abflussrohre gleichzeitig abfließt?

2.14 Zwei Stahlsorten enthalten 12 % bzw. 30 % Nickel. Aus beiden Stählen soll ein Stahl mit einem Nickelgehalt von 25 % und einer Masse von 180 kg geschmolzen werden. Wie viel kg Stahl jeder Sorte werden benötigt, wenn von Schmelzverlusten gänzlich abgesehen wird?

2.15 Für eine längere Autofahrt rechnet der Fahrer mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 60 km/h. Nachdem er genau die Hälfte der Strecke zurückgelegt hat, stellt er fest, dass er aufgrund von Baustellen durchschnittlich nur 40 km/h gefahren ist. Wie schnell müsste er die zweite Hälfte durchfahren, um den Zeitverlust wieder aufzuholen?

2.16 An einer Mauer, die eine Länge von $26\frac{2}{3}$ m, eine Breite von 1 m und eine Höhe von 4 m hat, arbeiten zwei Maurer. Der erste von ihnen kann, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, an einem Tage $5\frac{1}{3}$ m^3, und der zweite, wenn er täglich 11 Stunden arbeitet, in 9 Tagen $53\frac{1}{3}$ m^3 Mauerwerk fertigstellen. In welcher Zeit wird die Mauer fertig, wenn jeder der Maurer täglich 10 Stunden arbeitet und der erste 5 Arbeitstage, der zweite aber nur 2 Arbeitstage versäumt?

2.17 Bei einem Brand sollen alle Besucher ein vollbesetztes Kino durch die beiden Notausgänge innerhalb von drei Minuten verlassen können. Ein Notausgang hat wegen geringerer Breite nur zwei Drittel vom Durchlassvermögen des anderen. Wie lange dauert das vollständige Räumen des Kinos, wenn jeweils einer der beiden Notausgänge blockiert ist?

2.18 Bei einer Lokomotive macht auf einer Strecke von 441 m das Laufrad 112 Umdrehungen mehr als das größere Treibrad. Auf je sieben Umdrehungen des Laufrades kommen je drei Umdrehungen des Treibrades. Wie viel Umdrehungen macht das Treibrad auf einer Strecke von 10.5 km?

2.19 Auf einen unbiegsamen Stab, der durch die Punkte A und F verläuft, wirken sechs zu ihm senkrechte Kräfte, die nacheinander in den Angriffspunkten A, B, C, D, E und F angebracht sind. In A wirken 6 N abwärts, in B 4 N aufwärts, in C 5 N abwärts, in D 3 N aufwärts, in E 2 N aufwärts und in F 1 N abwärts. Die Entfernungen der Angriffspunkte betragen: $|\overline{AB}| = 3$ m, $|\overline{BC}| = 2$ m, $|\overline{CD}| = 4$ m,

$|\overline{DE}| = 6$ m, $|\overline{EF}| = 7$ m. In welcher Entfernung vom Punkt A, in welcher Richtung und mit welchem Betrag muss eine Kraft am Stab angebracht werden, damit dieser sich im Gleichgewicht befindet?

2.20 Zwei Bagger heben in 24 Tagen eine Baugrube aus. Der erste Bagger könnte diese Arbeit allein eineinhalbmal so schnell ausführen wie der zweite Bagger allein. In wie viel Tagen könnte jeder Bagger diese Arbeit ausführen?

Quadratische Funktionen

2.21 Folgende quadratische Gleichungen bzw. Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen, sind zu lösen:

a) $(a+bx)^2 + (a-bx)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

b) $\dfrac{4+x}{4-x} = \dfrac{x+9}{x-9}$

c) $2\sqrt{5+2x} - \sqrt{13-6x} = \sqrt{37-6x}$

d) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$

e) $(x-a+b)(x-b+c) = 0$

f) $\dfrac{5x-1}{9} + \dfrac{3x-1}{5} = \dfrac{2}{x} + x - 1$

g) $\dfrac{2x-1}{x-2} + \dfrac{3x+1}{x-3} = \dfrac{5x-14}{x-4}$

h) $x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}$

i) $\sqrt{5x-1} - \sqrt{8-2x} = \sqrt{x-1}$

j) $\sqrt{2x+1-2\sqrt{2x+3}} = 1$

k) $\left(\dfrac{57}{37}\right)^{1+x} + \left(\dfrac{57}{37}\right)^{1-x} = 10$

l) $17^{\frac{x+1}{x-1}} = 17^{\frac{x-1}{x+1}}$ **m)** $(a-x)^3 = (x-b)^3$

n) $10x^4 - 21 = x^2$ **o)** $x^{\frac{3}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} = 9x$

p) $(x-a)^2 + \dfrac{1}{(x-a)^2} = m$

2.22 Zu bestimmen sind alle $x \in \mathbb{R}$, die folgende Ungleichungen erfüllen:

a) $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} < 2$ **b)** $|x^2 - 2x + 1| \geq 0$

c) $|x^2 - 1| \leq 0$ **d)** $x + 2 \leq \dfrac{5}{x-2}$

2.23 Zu bestimmen ist $a \in \mathbb{R}$ so, dass die quadratische Gleichung genau eine Lösung hat:

a) $x^2 + 2x + a = 0$ **b)** $x^2 - 2ax + 16 = 0$

2.24 Durch zwei Zuflussrohre wird ein Becken in sechs Stunden gefüllt, wenn sie beide geöffnet sind. In wie viel Stunden kann das Becken jeweils durch jedes allein gefüllt werden, wenn das erste dazu fünf Stunden weniger offen zu sein braucht als das zweite?

2.25 Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie 3 : 4. Wie lang sind sie, wenn die Hypotenuse 555 m lang ist?

2.26 Die drei in einem Eckpunkt zusammenstoßenden Kanten einer rechteckigen Säule verhalten sich wie 3 : 4 : 12. Die Diagonale der Säule ist 104 cm lang. Wie groß sind die Kanten?

2.27 Eine Balkenwaage wiegt wegen unterschiedlich langer Hebelarme ungenau. Zur Ermittlung der genauen Masse eines Körpers kann die „Gaußsche Doppelwägung“ angewendet werden. Dazu wird der Körper unbekannter Masse m einmal auf der rechten und einmal auf der linken Waagschale gewogen, wobei die Massen m_1 und m_2 ermittelt werden.

a) Wie kann die tatsächliche Masse m aus den gemessenen Massen m_1 und m_2 bestimmt werden?

b) Die tatsächliche Masse des Körpers ist zu berechnen, wenn die Massen $m_1 = 62$ mg und $m_2 = 75$ mg ermittelt wurden.

2.28 Jemand hat ein Gefäß mit 144 l Wein. Er zapft eine gewisse Menge ab und ersetzt die abgezapfte Flüssigkeit durch Wasser. Nachdem er das zweimal getan hat, sind im Gefäß noch 100 l reiner Wein. Wie viel Liter hat er jedes Mal abgezapft?

2.29 Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich zwei Körper vom Scheitel aus, der eine mit einer Geschwindigkeit von 8 m/s, der andere, der seine Bewegung 4 Sekunden später beginnt, mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s. Nach wie viel Sekunden vom Beginn der Bewegung des ersten an werden beide die Entfernung 104 m haben?