1 Erste Falten

Zu Beginn wollen wir uns mit einigen grundlegenden Faltungen des Papiers befassen und Verbindungen zur euklidischen Geometrie herstellen. Dabei soll hier kein systematischer Aufbau und keine axiomatische Begründung des Papierfaltens geliefert werden. Eine solche axiomatische Begründung des Papierfaltens entstand zwischen 1989 und 2001 und wurde von JACQUES JUSTIN, HUMIAKI HUZITA und KOSHIRO HATORI entwickelt ([17]).

Die beim Falten von Papier entstehenden Faltlinien sind ein gutes Modell für Geraden der euklidischen Ebene (Bild 1.1a).

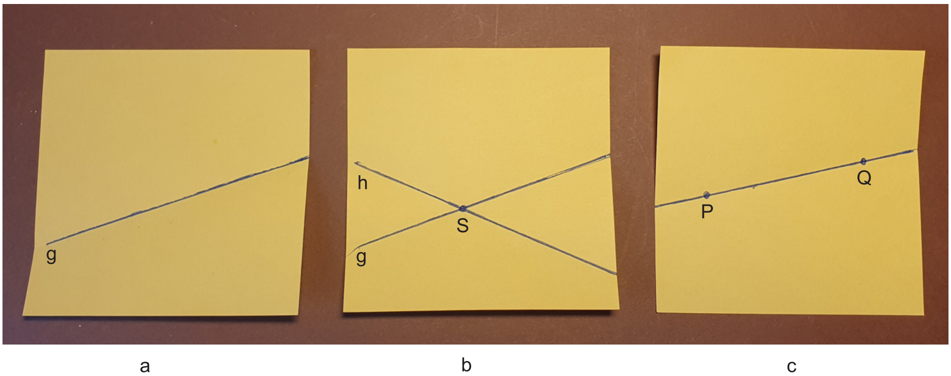


Bild 1.1 Faltgeraden

Der Schnittpunkt zweier Faltlinien lässt sich leicht ermitteln (Bild 1.1b). Durch zwei gegebene Punkte auf dem Faltpapier können wir (mit etwas Geschick) eine Faltlinie falten (Bild 1.1c).

Aus Bild 1.1a können wir auch sofort entnehmen, dass das Falten von Papier eng mit der Spiegelung an der Geraden verbunden ist, die durch die Faltlinie bestimmten wird. Falten wir nämlich das Papier an einer Faltlinie g um (Bild 1.2a), so entstehen teilweise zwei Schichten des Papiers, die direkt übereinander liegen. Stechen wir z.B. mit einer Nadel durch diese Doppellage hindurch, so markieren wir genau zwei Punkte (einen in jeder Papierlage), die direkt übereinander liegen (Bild 1.2b). Nach dem Auffalten bezeichnen wir diese markierten Punkte mit P und P' und verbinden diese mit Stift und Lineal (Bild 1.2c). Die eingezeichnete Gerade durch P und P' schneidet g in S. An S entstehen vier Winkel: α_1, α_1', α_2 und α_2'. Weil $\sphericalangle P'SP$ ein gestreckter Winkel ist, sind α_1 und α_1' sowie α_2 und α_2' Nebenwinkel zueinander, die aufgrund der Faltung an g auch deckungsgleich zueinander sind. Folglich hat jeder dieser Winkel eine Größe von $90°$. PP' ist damit senkrecht auf g.

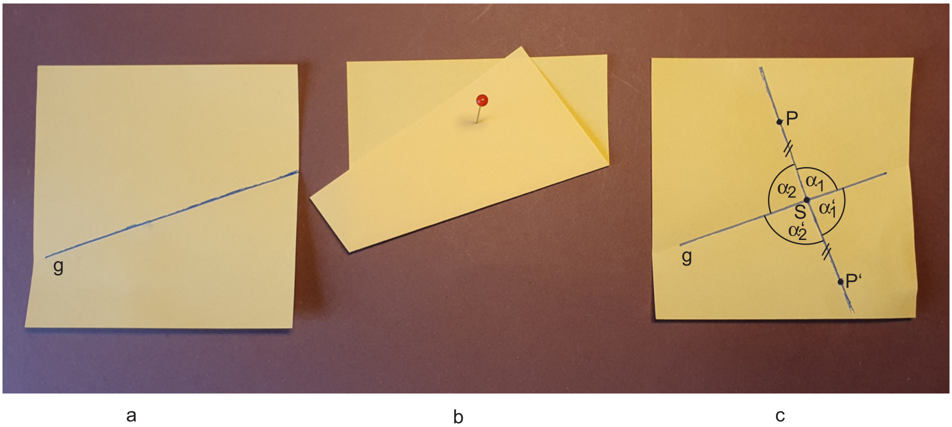


Bild 1.2 Geradenspiegelung

Weiterhin liegen die Strecken SP' und SP nach dem Falten an g direkt aufeinander, sie sind also deckungsgleich und folglich haben sie die gleiche Länge. Aufgrund dieser beiden Eigenschaften beim Falten ($PP' \perp g$ und $|SP'| = |SP|$) ergibt sich, dass das Falten an einer Geraden der Spiegelung an dieser Geraden entspricht.

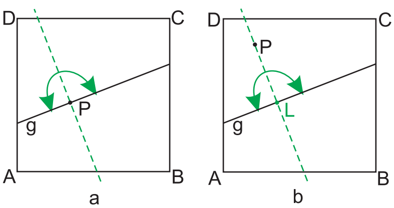


Bild 1.3 Eine Senkrechte

Mit diesen Überlegungen sind wir aber nun in der Lage, rechte Winkel zu falten.
Damit können wir

- in einem markierten Punkt P einer Faltgeraden g die zu g senkrechte Faltgerade falten (Bild 1.3a).
- von einem Punkt P außerhalb einer Faltgeraden g das Lot auf g fällen (Bild 1.3b).

In beiden Fällen müssen wir nur g so auf sich selbst falten, dass die Faltgerade durch P geht.

Und damit können wir auch Mittelpunkte von Strecken bestimmen.
Sind nämlich auf einer Faltgeraden g zwei Punkte P und Q gegeben, so können wir den Mittelpunkt M der Strecke PQ durch Falten bestimmen (Bild 1.4). Dazu bringen wir den Punkt P durch Umfalten auf den Punkt Q und streichen die dadurch bestimmte Faltlinie glatt. Diese Faltlinie schneidet g im gesuchten Mittelpunkt M von PQ. Gleichzeitig ist diese Faltgerade auch die Mittelsenkrechte der Strecke PQ.

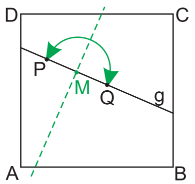
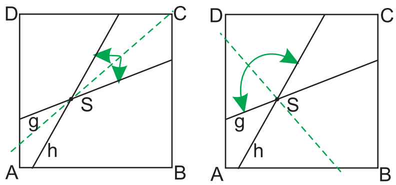


Bild 1.4 Streckenhalbierung



a b

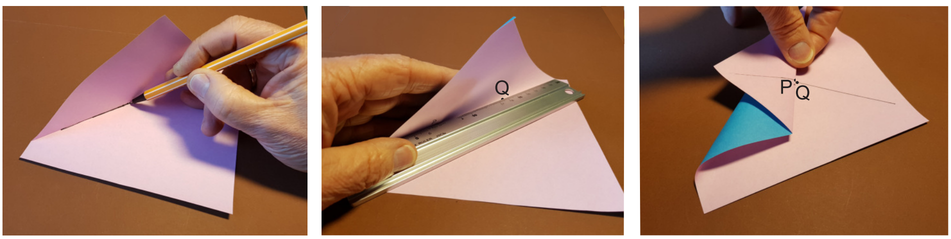
Bild 1.5 Winkelhalbierung

Natürlich können wir durch Falten auch einen gegebenen Winkel halbieren. Sind auf einem Faltpapier zwei Faltgeraden g und h gegeben, die sich in einem Punkt S schneiden, so falten wir g auf h, sodass die Faltgerade durch S geht. Diese Faltgerade halbiert dann den entsprechenden Winkel. Für das Falten von g auf h gibt es genau zwei verschiedene Möglichkeiten, sodass die Winkelhalbierenden von den beiden Winkeln, die durch g und h bestimmt sind, gefunden werden (Bilder 1.5a, b).

1.1 Technisches

Hier kommen drei praktische Falttipps, die beim Falten von Papier nützlich sind.

TIPP 1: Zur Untersuchung unserer Faltungen ist es günstig, wenn wir die Faltlinien mit einem Stift nachziehen. Das können wir machen, indem wir nach dem Falten auf das Papier ein Lineal an die neue Faltlinie anlegen und diese mit einem Stift nachzeichnen. Oder wir öffnen das Papier nach dem Falten nicht ganz und ziehen mit einem Stift direkt in der Falte die Faltlinie nach (Bild 1.6a).



a b c

Bild 1.6 Technische Tipps

TIPP 2: Manchmal ist es schwierig, zwei Punkte durch eine Faltgerade zu verbinden. Eine solche Faltgerade können wir gut erzeugen, indem wir ein Lineal an die beiden zu verbindenden Punkte anlegen und dann entlang des Lineals das Papier falten (Bild 1.6b). Natürlich entfernen wir das Lineal dann wieder und ziehen die Faltgerade gut nach.

TIPP 3: Wollen wir, wie im Bild 1.4, den Mittelpunkt oder die Mittelsenkrechte zu einer gegebenen Strecke falten, dann kann es sinnvoll sein, eine zusätzliche Faltlinie zu erzeugen. Und zwar falten wir das Faltpapier nach hinten um, sodass die Faltlinie durch einen der beiden Punkte geht. Nun können wir diesen Punkt besser auf den anderen falten (Bild 1.6c).

1.2 Kleine Anwendungen

Die eben besprochenen Techniken zum Halbieren von Strecken und Winkeln sowie zum Falten von rechten Winkeln sollen nun beim Falten einer Diagonalen im Rechteck und beim Falten eines kleinen Schwans zum Einsatz kommen.

1.2.1 Diagonale im Rechteck

Ist $ABCD$ ein rechteckiges Faltpapier, dann ist es manchmal nicht so einfach in das Rechteck eine Diagonale zu falten. Dies gilt im Besonderen für Rechtecke, bei denen eine Seite deutlich länger ist als die andere.

Zuerst überlegen wir: Wenn die Diagonale $d = AC$ in das Rechteck $ABCD$ gefaltet werden soll (Bild 1.7a), dann betrachten wir dazu die Mittelsenkrechte m, die d in M schneidet (Bild 1.7b).

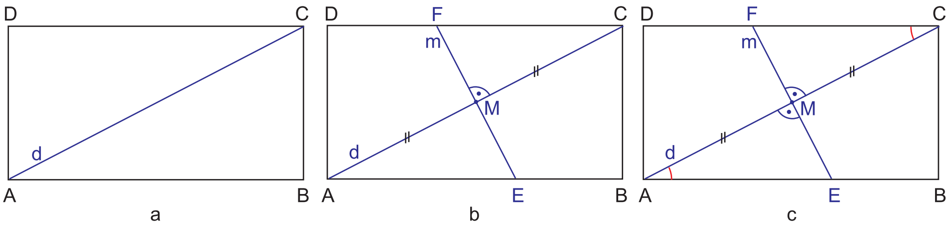


Bild 1.7 Diagonale im Rechteck

E und F sind die Schnittpunkte von m mit AB bzw. CD. Weil m die Mittelsenkrechte von AC ist, ist $|AM| = |MC|$ und M steht senkrecht auf d.
Da AB und CD parallel zueinander sind, sind die beiden im Bild 1.7c markierten Winkel bei A bzw. C kongruent zueinander. Folglich sind auch die beiden Dreiecke AEM und CFM wegen (wsw) kongruent zueinander und damit ergibt sich auch $|EM| = |MF|$. M ist also auch der Mittelpunkt von EF, womit AC auch die Mittelsenkrechte von EF ist.

Jetzt können wir falten, denn die Faltgerade EF lässt sich leicht bestimmen. Dazu müssen wir nur A auf C falten. Die Faltgerade bestimmt die Strecke EF (Bild 1.8a).

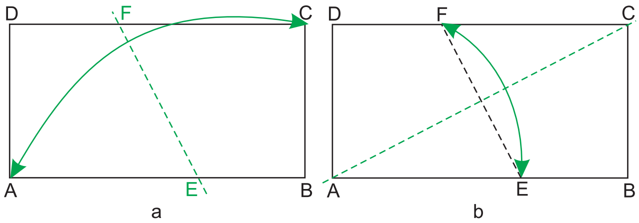


Bild 1.8 Faltfolge zur Diagonalen im Rechteck

Nun müssen wir noch E auf F falten (Bild 1.8b). Die zugehörige Faltgerade ist die gewünschte Diagonale AC.

1.2.2 Ein kleiner Schwan

Aus einem quadratischen Faltpapier $ABCD$ wird jetzt ein kleiner Schwan (Bild 1.9) entstehen, bei dem interessante Winkelbetrachtungen möglich sind.
Die Faltfolge ist den Bildern 1.10a–e zu entnehmen.
Zuerst falten wir die Diagonale AC auf die übliche Weise in das Quadrat $ABCD$. Dann falten wir AB und AD so auf AC, dass die jeweilige Faltlinie durch A geht. Dabei entstehen die Punkte E und F. Nebenbei bemerken wir, dass $AECF$ ein Drachenviereck ist, was sich durch die Faltlinien bzw. entsprechende Geradenspiegelungen nachweisen lässt.

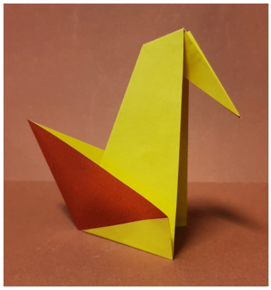


Bild 1.9 Kleiner Schwan

Als nächstes falten wir die Faltlinie EF. Wir wenden unser Faltpapier und falten E so auf AE, dass die Faltlinie durch B' geht, wobei sie nur zwischen E und B' gefaltet wird. Analog verfahren wir mit dem Punkt F, den wir so auf AF falten, dass die Faltlinie auch durch B' geht. Auch hier falten wir die Faltlinie nur zwischen F und B'.

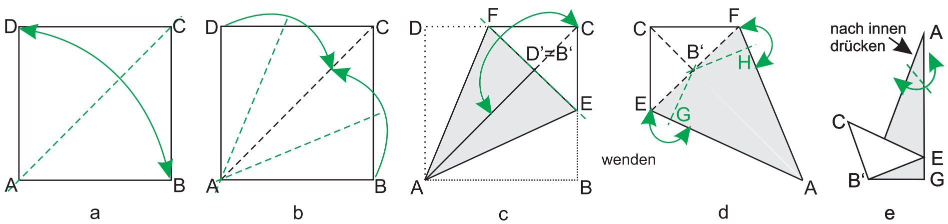


Bild 1.10 Faltfolge Schwan

Jetzt wird es etwas schwieriger. So wie unser Faltpapier jetzt liegt (Bild 1.10d), ist AC eine Bergfalte. Wir falten $B'C$ zur Talfalte um. Gleichzeitig falten wir entlang AB', $B'H$ und $B'G$ so, dass G auf H fällt. Damit ist der kleine Schwan fast fertig (Bild 1.10e). Für Kopf und Schnabel falten wir, wie es im Bild 1.10e zu sehen ist, in der Nähe von A.