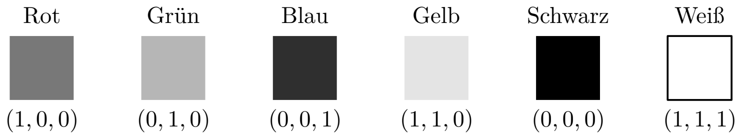


Bild 2.1: Zum RGB-Farbenmodell.

Blau gemischt werden. Dies entspricht dann einer Linearkombination mit den Tripeln $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Zum Beispiel ist

$$(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0)$$

was der Farbe Gelb entspricht. Dem Tripel $(0,0,0)$ entspricht Schwarz und dem Tripel

$$(1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)$$

Weiß.

Beim CMY-Farbmodell dienen Cyan (C), Magenta (M) und Gelb (Y, Yellow) als Grundfarben. Diese werden subtraktiv gemischt, die entsprechenden komplementären Farbanteile werden also ausgeblendet. Zur Umrechnung von additiver zu subtraktiver Mischung und umgekehrt dient dabei die Formel

$$(\mathrm{C}, \mathrm{M}, \mathrm{Y}) = (1,1,1) - (\mathrm{R}, \mathrm{G}, \mathrm{B}).$$

Reines Rot wird im RGB-Farbmodell durch $(1,0,0)$ beschrieben, im CMY-Farbmodell stellt das Tripel

$$(1,1,1) - (1,0,0) = (0,1,1)$$

reines Rot dar. Mit dem CMY-Farbmodell arbeiten zum Beispiel Farbdrucker.

Das CMYK-Farbmodell ist eine Erweiterung des CMY-Modells und benutzt Schwarz (K, Key-Color, Kontrast) als vierte Farbe.

Geometrische Modelle

Nun wollen wir ein paar grundlegende Modelle aus der Analytischen Geometrie[2] vorstellen und dabei die Verbindung zur Linearen Algebra aufzeigen.

Die Verbindung von Geometrie und Algebra wird dadurch erreicht, dass man geometrische Objekte als Punktmengen auffasst und jedem Punkt reelle Zahlen zuordnet, durch die er sich von anderen unterscheidet. Eine Gerade oder eine Kurve ist dann eine Menge von Punkten, für deren reelle Zahlen bestimmte Bedingungen gelten, die man Gleichungen dieser Objekte nennt, zum Beispiel Gleichung einer Graden oder eines Kreises. Die Punkte, die einer linearen Gleichung in zwei Variablen genügen, beschreiben eine Gerade, die einer quadratischen Gleichung in zwei Variablen einen Kegelschnitt.

Geometrische Darstellungen der Elemente aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Ein reelles Zahlenpaar (a_1, a_2) aus $\mathbb{R}^2$ kann als Punkt in einem Koordinatensystem der Ebene dargestellt werden, siehe Bild 2.2 links. Das Koordinatensystem kann muss

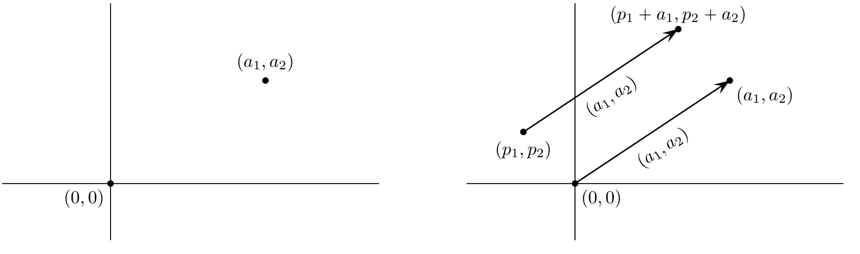


Bild 2.2: Zu den geometrischen Interpretationen der Elemente aus $\mathbb{R}^2$.

aber nicht kartesisch[3] sein. Die Koordinatenachsen müssen nicht notwendigerweise senkrecht zueinander sein, aber auch Koordinatensysteme mit senkrechten Achsen können sich durch Skalierung der Achsen und ihre Lage unterscheiden. Punkte sind oft mathematische Modelle für Positionen oder Orte, zum Beispiel für eine Punktmasse in der Physik.

Ein reelles Zahlenpaar (a_1, a_2) aus $\mathbb{R}^2$ kann auch als Pfeil (gerichtete, orientierte Strecke) geometrisch dargestellt werden. Der Anfangspunkt des Pfeiles ist der Nullpunkt $(0, 0)$

[2] Das Wesen der Analytischen Geometrie besteht in einer Zusammenführung von Geometrie und Algebra zu einer Methode, die es ermöglicht, geometrische Probleme mit algebraischen Mitteln durch Gleichungen zu beschreiben, zu analysieren und zu lösen und andererseits algebraische Probleme geometrisch zu veranschaulichen und dadurch ihre Lösung zu erleichtern, siehe [6].

[3] Unter einem kartesischen Koordinatensystem versteht man ein Koordinatensystem mit zueinander senkrechten Achsen mit gleicher Skalierung, wobei der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzzahligen Achsenwerten der Länge der Einheitsstrecke entspricht.

und der Endpunkt (Spitze) ist der Punkt (a_1, a_2). Die Punkte auf dem Pfeil haben keine besondere Bedeutung. Nun dient aber nicht nur dieser Pfeil als Darstellung, sondern jeder Pfeil, der zu diesem parallel, gleich lang und gleich gerichtet ist. Diese Pfeilklasse stellt das Element (a_1, a_2) dar und jeder Pfeil aus dieser Pfeilklasse ist ein Repräsentant für das Element (a_1, a_2). Ein Repräsentant der Pfeilklasse, die das Paar (a_1, a_2) darstellt, ist also ein Pfeil mit beliebigem Anfangspunkt (p_1, p_2) und Endpunkt $(p_1 + a_1, p_2 + a_2)$. Das Bild 2.2 rechts zeigt zwei Pfeile, das heißt, zwei Repräsentanten des reellen Zahlenpaares (a_1, a_2). Bitte beachten Sie: Zahlenpaar (Vektor) gleich Pfeil ist eine Fehlvorstellung[4]. Eine Besonderheit ist das Paar $(0, 0)$, auch Nullpaar genannt. In diesem Fall gibt es keinen Pfeil.

Beispiel 2.4 Das reelle Zahlenpaar $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ kann dargestellt werden als Pfeil von Punkt $(0, 0)$ zu Punkt $(2, 1)$ oder als Pfeil von Punkt $(1, 0)$ zu Punkt $(1, 0) + (2, 1) = (3, 1)$, oder als Pfeil von $(3, 1)$ nach $(5, 2)$ usw. Die Pfeile gehören zu derselben Pfeilklasse. Aber nicht zu dieser Pfeilklasse gehört der Pfeil von Punkt $(1, 1)$ zu Punkt $(0, 3)$, oder der Pfeil von Punkt $(0, 0)$ zu Punkt $(0, -3)$. □

Beispiel 2.5 Bestimmen Sie die Pfeilklasse in Form eines reellen Zahlenpaares zu der der Pfeil gehört, der vom Punkt $(4, -9)$ zum Punkt $(-1, 4)$ zeigt. Zu welcher Pfeilklasse (reelles Zahlenpaar) gehört der Pfeil, der von $(-1, 4)$ nach $(4, -9)$ zeigt? Wie hängen die beiden Zahlenpaare zusammen?

Lösung: Der Pfeil, der vom Punkt $(4, -9)$ zum Punkt $(-1, 4)$ zeigt, gehört zur Pfeilklasse, die das reelle Zahlenpaar $(-5, 13)$ darstellt. Der Pfeil, der vom Punkt $(-1, 4)$ zum Punkt $(4, -9)$ zeigt, gehört zur Pfeilklasse, die das reelle Zahlenpaar $(5, -13)$ darstellt. Es ist das Gegenpaar (Gegenvektor). □

Punkte und Pfeile in Zeichnungen sind Veranschaulichungen von reellen Zahlenpaaren oder Zahlentripeln. Je nach Situation, je nach Kontext, wählt man die Veranschaulichung, welche besser passt. Alles gilt analog in $\mathbb{R}^3$ mit drei Koordinaten.

Der Leser kann zu Recht einwenden, dass es verwirrend sein kann, nicht zwischen Punkten und Pfeilen zu unterscheiden. Im Rahmen der affinen Geometrie werden diese beiden Begriffe klar unterschieden. Eine Einführung in die affine Geometrie finden Sie zum Beispiel in [12] oder [13].

Verschiebungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Pfeile sind mathematische Modelle für Verschiebungen (Translationen). Ausgehend von dem Punkt (p_1, p_2) wird der Punkt $(p_1 + a_1, p_2 + a_2)$ erreicht, indem man a_1 Einheiten entlang der ersten Achse und a_2 Einheiten entlang der zweiten Achse geht. Ist $a_1 > 0$

[4] Die Schwierigkeiten mit dem Konzept der Pfeilklassen weisen auf ein grundsätzliches Problem bei der Behandlung von Vektoren (Tupeln) hin: Einerseits kommt anschaulichen Vorstellungen eine wichtige Bedeutung für die Entwicklung intuitiven Begriffsverständnisses zu, andererseits können aber Veranschaulichungen zu Begriffseinengungen und Begriffsverzerrungen führen, die den Blick auf das Wesentliche eines Strukturbegriffs verstellen.

so geht man in Richtung positiver erster Achse, ist $a_1 < 0$, dann entlang negativer Achse. Entsprechend für a_2.

Beispiel 2.6 Wir betrachten die Punkte $(1,4)$ und $(4,8)$. Der Pfeil, der von $(1,4)$ nach $(4,8)$ zeigt, also die Verschiebung, die man benötigt, um $(1,4)$ nach $(4,8)$ zu verschieben, ist Repräsentant der Pfeilklasse zu dem reellen Zahlenpaar $(3,4)$. ▫

Addition der Elemente aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Wir besprechen den Fall $\mathbb{R}^2$, alles gilt analog in $\mathbb{R}^3$ mit drei Koordinaten. Die Addition von reellen Zahlenpaaren ist koordinatenweise definiert. Sind (a_1, a_2) und (b_1, b_2) aus $\mathbb{R}^2$, so ist $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in \mathbb{R}^2$. Für die Addition erhalten wir folgende Bilder. In der Punktsprache. Das reelle Zahlenpaar $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ ist der vierte Punkt des von den drei Punkten $(0,0)$, (a_1, a_2), (b_1, b_2) aufgespannten Parallelogramms. In der Pfeilsprache. Für die Addition in der Pfeilsprache gibt es zwei Bilder.

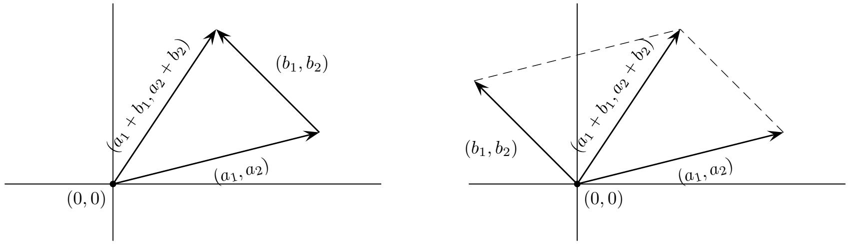
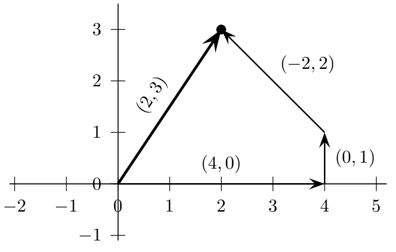


Bild 2.3: Zur Addition von Pfeilen.

- Der Pfeil von $(0,0)$ nach (b_1, b_2) wird parallel verschoben, sodass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt des Pfeiles von $(0,0)$ nach (a_1, a_2) übereinstimmt. Dann ist der Pfeil vom Nullpunkt zum Endpunkt des verschobenen Pfeils ein Repräsentant der Pfeilklasse von $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, siehe Bild 2.3 links.
- Der Pfeil von $(0,0)$ nach (a_1, a_2) und der Pfeil von $(0,0)$ nach (b_1, b_2) spannen ein Parallelogramm auf. Dann ist die gerichtete Diagonale des Parallelogramms ein Repräsentant der Pfeilklasse von $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, siehe Bild 2.3 rechts.

Beispiel 2.7 Gegeben sind die drei reellen Paare $a = (4,0)$, $b = (0,1)$ und $c = (-2,2)$. Konstruieren Sie geometrisch die Summe $a + b + c$ und lesen Sie dann das Ergebnis aus der Geometrie ab. Berechnen Sie $a + b + c$ algebraisch und überprüfen Sie die beiden Ergebnisse auf Gleichheit. (Bitte beachten Sie: Es gilt die Rechenregeln $(a + b) + c = a + (b + c)$. Deshalb können wir die Klammern auch weglassen.)

Lösung: Das Bild 2.4 rechts und links zeigt die geometrische Konstruktion mit den Ergebnis $(2,3)$. Die algebraische Rechnung ist $a + b + c = (4,0) + (0,1) + (-2,2) = (2,3)$. Die Ergebnisse stimmen überein. ▫



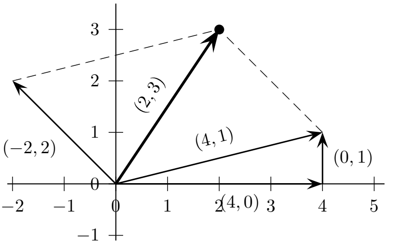


Bild 2.4: Drei Elemente addieren.

Multiplikation der Elemente aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Wir besprechen den Fall $\mathbb{R}^2$, alles gilt analog in $\mathbb{R}^3$ mit drei Koordinaten. Die Multiplikation eines reellen Paares a aus $\mathbb{R}^2$ mit einer reellen Zahl r ist koordinatenweise definiert. Ist $r = 0$, so ist das Ergebnis das Nulltupel, geometrisch der Punkt $(0, 0)$. Für $r = -1$ ist wegen $(-1)a = -a$ das Ergebnis das Gegentupel.

In der Punktsprache. Das reelle Paar (ra_1, ra_2) bezeichnet den Punkt der durch zentrische Streckung (oder Stauchung) mit dem Zentrum im Ursprung und Streckfaktor (Stauchungsfaktor) r aus (a_1, a_2) hervorgeht.

In der Pfeilsprache. Für (a_1, a_2) ist ein Pfeil der Pfeilklasse von (ra_1, ra_2) das r-fache eines Pfeiles von der Pfeilklasse von (a_1, a_2). Für $r > 0$ haben ra und a gleiche Richtung und Orientierung, für $r < 0$ haben ra und a gleiche Richtung und entgegengesetzte Orientierung.

Geraden in $\mathbb{R}^2$

Wir besprechen nun Geraden in $\mathbb{R}^2$, und beginnen mit einem Beispiel.

Beispiel 2.8 Gegeben sind $(4, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $(-2, 1) \in \mathbb{R}^2$. Es werden aus $(4, 0) + t(-2, 1)$ die reellen Paare für $t = -1/4, 1, 2, 3$ berechnet und als Punkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Es ist $t = -1/4 : (4, 0) + (-1/4)(-2, 1) = (4.5, -0.25)$, $t = 1 : (2, 1)$, $t = 2 : (0, 2)$, $t = 3 : (-2, 3)$. In Bild 2.5 links sehen Sie eine Visualisierung. Es ist erkennbar, dass alle vier Punkte auf einer Geraden liegen. Durch die Visualisierung einer größeren Anzahl von Punkten nach derselben Vorgehensweise wird dies noch deutlicher, siehe Bild 2.5 rechts. ▫

Sind $p \in \mathbb{R}^2$ und $o_2 \neq u \in \mathbb{R}^2$ gegeben, dann entspricht der Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = p + tu, t \in \mathbb{R}\}$$