Schließlich kann man die Regel «Jeder stößt mit jedem an» aufweichen:

2. Nicht mit dem Partner

Auf einer Gesellschaft sind nur Paare eingeladen. Jeder stößt mit jedem genau einmal an – aber nicht mit seinem Partner. Es klingelt genau 112-mal.

Wie viele Paare sind anwesend?

Lösung:

Auf der Gesellschaft sind genau 8 Paare.

Erklärung: Jeder der 16 Teilnehmer stößt mit genau 14 anderen an. Also klingelt es bei 16 Gästen genau $16 \cdot 14/2$-mal, das heißt 112-mal.

Zusatzinformation: Wenn m Paare bei einer Party sind und jeder mit jedem – außer mit seinem Partner – anstößt, dann klingelt es genau $2m \cdot (2m-2)/2 = 2m(m-1)$-mal.

Schließlich gibt es noch eine interessante Variation der Anstoßaufgaben.

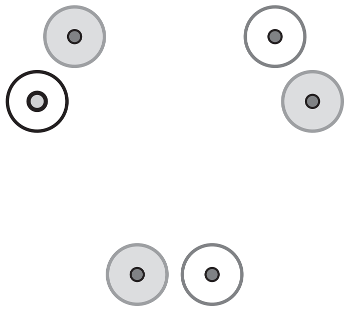
3. Nicht jeder mit jedem

Der Professor und seine Frau haben zwei befreundete Ehepaare eingeladen. Zur Begrüßung trinkt jeder ein Glas Sekt. Manche stoßen miteinander an, manche nicht. Das passiert nicht systematisch, aber so, dass keiner mit seinem Partner anstößt und mit jedem anderen höchstens einmal.

Der Professor hat nicht richtig aufgepasst. Als er seine Frau fragt, sagt diese nur: «Wir anderen haben alle mit einer unterschiedlichen Zahl von Menschen angestoßen.»

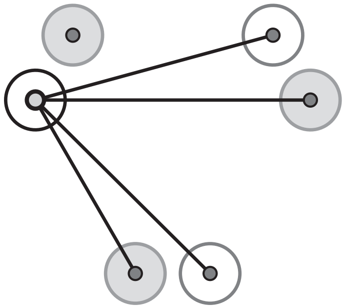
Mit wie vielen Menschen hat der Professor angestoßen?

Lösungsweg: Wir stellen jeden Teilnehmer durch einen kleinen Kreis dar. Der eine Partner eines Paares ist durch einen dunklen, der andere durch einen hellen Kreis gekennzeichnet. Der Professor wird durch den dunklen Kreis unten repräsentiert.

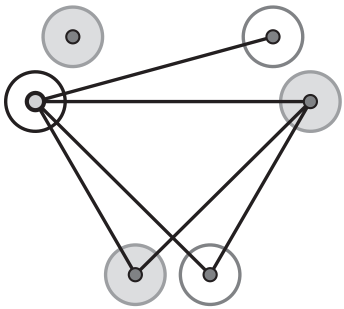


Da die anderen fünf Personen alle mit unterschiedlich vielen Menschen angestoßen haben, müssen sie mit 0, 1, 2, 3, 4 Personen angestoßen haben (denn keiner kann mit mehr als vier Personen anstoßen).

Wenn die Frau des Professors mit vier Personen angestoßen hätte, müssten das die vier Gäste sein. Dann hätte aber jeder Gast mit mindestens einer Person angestoßen und keiner mit null Personen. Das widerspricht der Aussage der Frau des Professors. Also ist die Person, die mit vier anderen angestoßen hat, einer der Gäste. Sein oder ihr Partner ist dann der, der mit niemanden angestoßen hat. Wir stellen die Situation durch folgendes Bild dar (der Professor und seine Frau sind unten gedacht):



Nun fragen wir: Kann die Frau des Professors mit drei Personen angestoßen haben? Nein, denn dann hätte jeder Gast mit null oder mindestens zwei Personen angestoßen und keiner mit nur einer. Also hat ein Partner des zweiten eingeladenen Paars mit drei Personen angestoßen. Die Situation ist also so, wie auf folgendem Bild zu sehen ist:



Lösung:

Der Professor und seine Frau haben jeweils mit zwei Personen angestoßen (einem von jedem Gästepaar), und zwar den gleichen.

Hinweis: Man kann eine entsprechende Aufgabe auch für beliebig viele eingeladene Paare formulieren. Die Antwort ist stets: Der Professor und seine Frau haben mit den gleichen Personen angestoßen, und zwar mit jeweils einer von jedem eingeladenen Paar.

4. Sitzordnung

Ein Gastgeberehepaar hat weitere 4 Paare, jeweils Mann und Frau, zu einem Essen eingeladen. Insgesamt sind es also 5 Paare. Das Essen wird an einem großen runden Tisch eingenommen. Nun haben sich die Frauen in den Kopf gesetzt, dass keine Frau zwischen zwei Männern sitzen soll, und sie wünschen sich auch, dass kein Mann zwischen zwei Männern sitzt.

Der Gastgeber kommt ins Grübeln. Kann er diesen Wunsch erfüllen?
Wir wäre es, wenn insgesamt 6 Paare an dem Essen teilnehmen würden?

Lösungsweg: Wir versuchen, uns klarzumachen, warum man 5 Paare nicht so setzen kann, wie es die Frauen wünschen. Es ist klar, dass maximal 2 Männer nebeneinandersitzen dürfen. Da 5 Männer zu verteilen sind, gibt es mindestens 3 zusammenhängende Männergruppierungen (zum Beispiel zweimal 2 zusammen und einer einzeln). In die drei «Lücken» müssen die Frauen gesetzt werden. Da keine Frau allein zwischen zwei Männern sitzen darf, sitzen in jeder «Lücke» mindestens 2 Frauen. Also bräuchte man für die (mindestens) 3 Lücken mindestens 6 Frauen.

Lösung:

Bei 5 Paaren geht es nicht. Bei 6 Paaren, also 6 Männern und 6 Frauen, wäre es einfach: Man würde abwechselnd jeweils 2 Frauen und 2 Männer platzieren.

5. Wie viele Männer?

Auf einem Fest sind insgesamt 53 Männer und Frauen. Den ganzen Abend über wird getanzt. Jede Frau hat mit mindestens 10 Männern getanzt. Genauer gesagt hat eine der Frauen mit 10 Männern getanzt, eine mit 11, eine mit 12 usw. bis zur letzten Frau, die mit allen Männern getanzt hat. Wie viele Frauen und Männer waren auf dem Fest?

Lösungsweg: Wir nummerieren die Frauen kurzzeitig (und wenig charmant) mit der Anzahl der Männer, mit denen sie getanzt haben. Es gibt also die Frauen F_{10}, F_{11}, F_{12}, …

Nun denken wir uns für einen Augenblick noch neun Frauen F_1, F_2, …, F_9 hinzu, die mit 1 bzw. 2 … bzw. 9 Männern getanzt haben. Dann hätten insgesamt $53 + 9 = 62$ (reale und gedachte) Frauen und Männer an dem Fest teilgenommen.

Wir bezeichnen die Anzahl der Frauen mit m. Dann tragen die Frauen die Bezeichnungen F_1, F_2, …, F_9, F_{10}, …, F_m. Die Frau F_m hat mit genau m Männern getanzt. In der Aufgabe steht, dass sie mit allen Männern getanzt hat. Also gibt es auch genau m Männer.

Lösung:

Auf dem Fest waren $62/2 = 31$ Männer und $31 - 9 = 22$ reale Frauen.

6. Eine kinderreiche Familie

Eine kinderreiche Familie hat Söhne und Töchter. Einer der Söhne sagt: «Ich habe genauso viele Schwestern wie Brüder», während eine Tochter sagt: «Ich habe doppelt so viele Brüder wie Schwestern.»

Wie viele Töchter und Söhne hat die Familie?