

werben die Fähigkeit, Mengen zu unterscheiden und damit erlangen sie ein großes Repertoire an nicht-numerischen Mengenbegriffen (groß, klein, viel, wenig etc.). Unter Nutzung von Begriffen wie *mehr* und *weniger* können sie auch Mengenvergleiche durchführen, sie sind aber noch nicht in der Lage, zwischen einzelnen Stückzahlen zu differenzieren (Sinner 2011).

Parallel dazu, aber unabhängig davon, entwickelt sich ab etwa einem Alter von zwei Jahren die Zahlwortreihe. Kinder erlernen die Zahlwortreihe, die – wie ein Gedicht – auswendig aufgesagt werden kann, ohne dass die einzelnen Zahlwörter mit den korrespondierenden Mengen verbunden werden. Mengen und Zahlen stehen noch isoliert nebeneinander, der Zahlwortreihe kommt lediglich eine Ordnungsfunktion zu (ordinaler Zahlaspekt).

Anzahlkonzept

Auf der **Ebene II** verstehen die Kinder, dass jede Zahl mit einer bestimmten Menge verknüpft ist und folglich Mengen durch Zahlen bezeichnet werden können. Das Anzahlkonzept wird nach Krajewski/Schneider (2006) in zwei Phasen erworben:

In der *Phase Ila* erwerben die Kinder zunächst ein *unpräzises Anzahlkonzept*. Die Mengen-Zahlen-Zuordnung funktioniert hier zunächst nach groben Mengenkategorien (viel, wenig, sehr wenig etc.).



Beispiel

Kinder ordnen Zahlwörter wie zwei oder fünf in die Kategorie „wenig“ ein, wohingegen 100 in die Kategorie „viel“, 1000 in die Kategorie „sehr viel“ fällt.

Dies geschieht, obwohl sie noch nicht in der Lage sind, diese Mengen bzw. bis zu diesen Zahlen zu zählen. Die Zuordnung resultiert allein aus der Erfahrung, dass man bis zum Erreichen großer Zahlen viel länger zählen muss als bis zum Erreichen kleiner Zahlen. Die Dauer des Zählens korrespondiert also mit der Größe der Zahl. Die Kinder können zu diesem Zeitpunkt zwischen Anzahlen, die verschiedenen Mengenkategorien zugeordnet sind, unterscheiden (Sinner 2011).



Beispiel

Bis zwei muss man nur kurz zählen, also gehört zwei zur Kategorie „wenig“. Bis 100 muss man ganz lange zählen, deshalb sind 100 „viel“. Also ist fünf weniger als 100.

Sie sind allerdings nicht in der Lage, präzise Mengen, die zur gleichen Mengenkategorie gehören, zu unterscheiden.



Beispiel

Für 15 und 17 muss man etwa gleich lang zählen. Welche Zahl größer ist, kann noch nicht ermittelt werden.

Dies gelingt erst, wenn das *präzise Anzahlkonzept* in *Phase IIb* erworben wurde. Dabei wird die auf Ebene I gelernte exakte Zahlwortreihe an die Fähigkeit zur Seriation von Mengen gekoppelt. Die Kinder verstehen nun, dass die Zahlenfolge exakte, aufsteigende Quantitäten repräsentiert. Sie erkennen, dass beim Abzählen verschiedener Mengen die letzte Zählzahl die Mächtigkeit der Menge angibt. Sie erkennen auch, dass die Dauer des Zählens exakt mit der Mächtigkeit der zu zählenden Menge übereinstimmt. Erst jetzt sind sie in der Lage, Zahlen, die eng beieinander liegen oder zunächst in einer der groben Mengenkategorien zusammengefasst waren, der Größe nach zu ordnen und zu entscheiden, welche Zahl größer oder kleiner ist. Diese Erkenntnisse führen zu einem präzisen Anzahlkonzept bzw. dem Kardinalverständnis der Zahlen und befähigen zu Anzahlseriationen und -vergleichen.

Unabhängig vom Anzahlkonzept entwickelt sich das Verständnis für unbestimmte Mengen (ohne Zahlbezug) im Alter von drei bis fünf Jahren. So begreifen die Kinder, dass sich Mengen verändern, wenn man etwas hinzufügt oder wegnimmt, nicht jedoch durch Manipulation der räumlichen Ausdehnung oder der Form (*Mengeninvarianz*: Dies ist nach Piaget das Wissen, dass Anzahl, Masse und Volumen von Objekten gleich bleiben, wenn diese lediglich ihre Anordnung bzw. Form verändern). In dieser Phase festigt sich ein erstes grundlegendes Verständnis für die Addition und Subtraktion. Ebenso kommen die Kinder zu der Erkenntnis, dass sich Mengen in einzelne Teilmengen zerlegen lassen und dass man diese wieder zusammensetzen kann. Sie können nun also Vergleiche zwischen Mengen und Teilmengen anstellen.

Verständnis für Mengen

Eine ganze Tafel Schokolade ist mehr als jedes ihrer Teile.

Beispiel



Auf der **Ebene III** werden nun die auf Ebene II erworbenen Kompetenzen miteinander verknüpft. Die Integration des präzisen Anzahlkonzepts in das Verständnis für unbestimmte Mengen führt dazu, dass zusammengesetzte und zerlegte Mengen auch mit Zahlen und somit durch eine diskrete Anzahl darstellbar sind (Anzahlen zusammensetzen und zerlegen).

Integration der Kompetenzen

Sieben Kastanien lassen sich in drei und vier Kastanien aufteilen.

Beispiel



Außerdem können die Kinder den Unterschied zweier Mengen, welcher wiederum durch eine dritte Menge dargestellt wird, mit einer genauen Zahl bestimmen (Anzahldifferenzen bestimmen).

Sieben Kastanien sind drei mehr als vier Kastanien.

Beispiel



Während die Kompetenzen der ersten beiden Ebenen als mathematische Vorläuferkompetenzen anzusehen sind, spiegelt sich beim Übergang zur dritten Ebene bereits ein erstes arithmetisches Verständnis wider (Sinner 2011).

Das Modell verdeutlicht, wie viele unterschiedliche Kompetenzen zur Entwicklung des Zahlbegriffs notwendig sind und in welcher Beziehung sie zueinander stehen. Im Folgenden wird auf die einzelnen Kompetenzen näher eingegangen.

Mengen, Zahlen, Operationen

Mengen

Mengen erkennen und sortieren

Das Sortieren und Klassifizieren beinhaltet die Erfahrung, dass sich Objekte oder Lebewesen in spezifischen (z. B. physikalischen) Eigenschaften ähneln oder unterscheiden und sich nach diesen ordnen (sortieren) lassen. Dies ist für den mathematischen Entwicklungsprozess von großer Bedeutung, denn für die Ausbildung eines unpräzisen Mengenbegriffs (im dargestellten Modell auf der Ebene I) muss das Kind in der Lage sein, spezifische Eigenschaften von Objekten, z. B. Farbe, Form, Muster, Anzahl, Oberfläche oder Größe, als gleich oder unterschiedlich zu erkennen.

Beispiel

Es werden aus einer Menge alle Elemente gefunden, die rot sind.

Bausteine werden nach ihrer Form sortiert.

Mengen klassifizieren

Ebenso muss die Fähigkeit vorhanden sein, Objekte auf der Grundlage des Erkennens gleicher Eigenschaften nach einer oder mehreren Eigenschaften zusammenzufassen (= zu kategorisieren). Die Zuordnung von Objekten unter Berücksichtigung einer Eigenschaft gelingt Kindern bereits relativ früh, etwas später gelingt dies auch unter Berücksichtigung mehrerer Eigenschaften.

Beispiel

I Welche der folgenden Objekte sind rund (Kategorie)? Ball, Sonne, Aprikose, Pfirsich, Buch, Apfel...

II Vor dem Kind liegen Holzklötzchen verschiedener Formen und Farben. Die Anforderung lautet: Finde alle roten eckigen Klötzchen.



Kinder sind beim Übergang in die Schule in der Lage, Elemente einer Menge zu sortieren und nach ein oder zwei Eigenschaften in Kategorien zusammenzufassen.



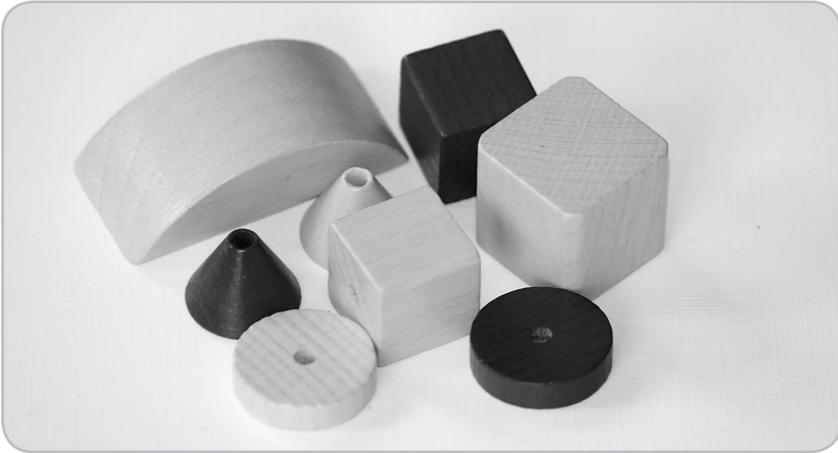


Abb. 1:
Unsortierte Menge

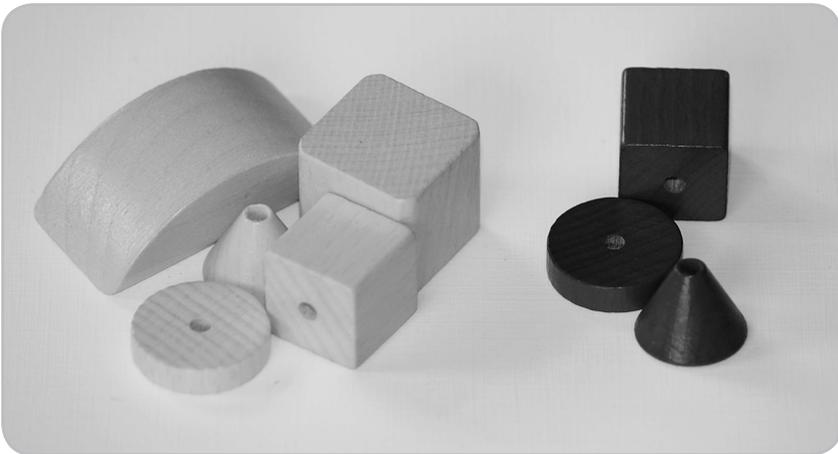


Abb. 2:
Nach Farben
sortierte Menge

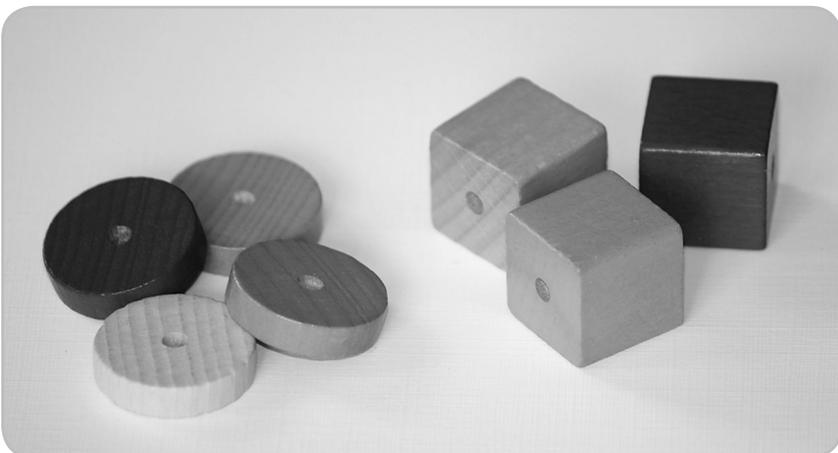


Abb. 3:
Nach Formen
sortierte Menge

Eine komplexere Variante ist die Klassifizierung nach Kategorien und Unterkategorien. Die Kinder müssen dabei wissen, dass zwei Elemente gleichzeitig verschiedenen und derselben Kategorie angehören können.

Beispiel

Ein Apfel hat Kerne und ist damit ein Kernobst. Eine Banane ist kernlos und daher kein Kernobst. Trotz dieses Unterschieds gehören Apfel und Banane zur Oberkategorie Obst.

Wovon gibt es mehr – Stofffiguren oder Stofftiere?



Abb. 4: Stofffiguren und Stofftiere – Klassifizierung – Stofftiere als Unterkategorie)



Die Klassifizierung nach Kategorien und Unterkategorien gelingt einigen Kindern bereits im Vorschulalter.

Mengen bestimmen

Unter der Bestimmung einer Menge versteht man die exakte Nennung der Anzahl. Bereits einjährige Kinder können Mengen mit zwei oder drei Elementen voneinander unterscheiden. Mit zwei Jahren bezeichnen Kinder Mengen mit Begriffen wie *viel* oder *wenig*, ab etwa vier Jahren kommen Zahlbegriffe bei sehr kleinen Mengen, ab fünf Jahren bei Mengen bis zehn hinzu.



Beim Übergang in die Schule wissen Kinder, dass sie beim Zählen einer Menge mit der Eins beginnen müssen. Sie zählen jedes Objekt nur einmal und wissen, dass die letztgenannte Zahl die Anzahl der Menge ausdrückt (Entwicklungsmodell von Krajewski/Schneider 2006).

Mengen vergleichen

Der Mengenvergleich umfasst die Fähigkeit zu erkennen, welche der vorgegebenen Mengen größer bzw. kleiner als die andere(n) ist. Mit dem Vergleichen von Objekten beginnen Kinder bereits im Alter von etwa zwei Jahren, sie nutzen dabei Begriffe wie *mehr/weniger* oder *größer/kleiner*.