Mathematik

Auf einen Blick!

Funktionen

für Klausuren und Prüfungen

STARK

www.stark-verlag.de

F'(x) = f(x)

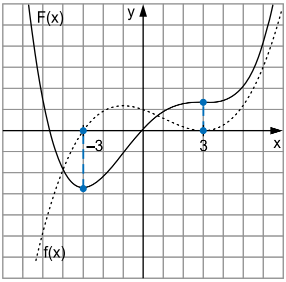
F'(x) = 0 ⇔ f(x) = 0
Der Graph der Stammfunktion **F(x)** hat dort **waagrechte Tangenten**, wo sich die **Nullstellen** der Grundfunktion **f(x)** befinden.

F'(x) > 0 ⇔ f(x) > 0
Der Graph der Stammfunktion **F(x) steigt** im Intervall]a; b[, wenn in]a; b[**f(x) > 0** gilt, der Graph von f(x) also **oberhalb der x-Achse** verläuft.

F'(x) < 0 ⇔ f(x) < 0
Der Graph der Stammfunktion **F(x) fällt** im Intervall]c; d[, wenn in]c; d[**f(x) < 0** gilt, der Graph von f(x) also **unterhalb der x-Achse** verläuft.

Beispiel:
F(x) ist **eine** Stammfunktion der Funktion f(x) (weitere entstehen durch Verschiebung in y-Richtung). Man kann ablesen:

	f(x)	F(x)
$x < -3$	negativ	monoton fallend
$-3 < x < 3$	positiv	monoton steigend
$x > 3$	positiv	monoton steigend
$x = -3$	Nullstelle	Tiefpunkt
$x = 3$	Nullstelle	Terrassenpunkt



F''(x) = f'(x)

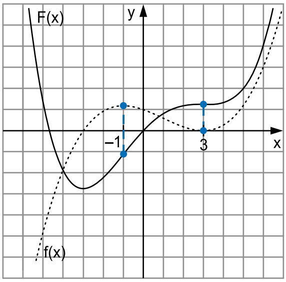
F''(x) = 0 ⇔ f'(x) = 0
Der Graph der Stammfunktion **F(x)** wechselt dort **die Krümmung (Wendestelle)**, wo sich die **Nullstellen mit Vorzeichenwechsel** von **f'(x)** und somit **Extremwerte** von **f(x)** befinden.

F''(x) > 0 ⇔ f'(x) > 0
Der Graph der Stammfunktion **F(x)** ist im Intervall]a; b[**linksgekrümmt**, wenn in]a; b[**f'(x) > 0** gilt, der Graph von **f(x)** also **steigt**.

F''(x) < 0 ⇔ f'(x) < 0
Der Graph der Stammfunktion **F(x)** ist im Intervall]a; b[**rechtsgekrümmt**, wenn in]a; b[**f'(x) < 0** gilt, der Graph von **f(x)** also **fällt**.

Beispiel:
F(x) ist **eine** Stammfunktion der Funktion f(x). Man kann ablesen:

	f(x)	F(x)
$x = -1$	Hochpunkt	Wendepunkt
$x = 3$	Tiefpunkt	Wendepunkt
$x < -1$	monoton steigend	linksgekrümmt
$-1 < x < 3$	monoton fallend	rechtsgekrümmt
$x > 3$	monoton steigend	linksgekrümmt



$I'(x) = f(x)$ und $I''(x) = f'(x)$

Da jede Integralfunktion $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ auch Stammfunktion ist, gelten entsprechende **Zusammenhänge** wie bei den Stammfunktionen [▶ S. 14]:

$f(b) = 0$ mit Vorzeichenwechsel	$\Leftrightarrow$	I hat für $x = b$ Extremwert
$f(c) = 0$ ohne Vorzeichenwechsel	$\Leftrightarrow$	I hat für $x = c$ Terrassenpunkt
$f(x) < 0$ für $x < b$	$\Leftrightarrow$	I fällt für $x < b$
$f(x) > 0$ für $x > b$	$\Leftrightarrow$	I steigt für $x > b$
f hat für $x = d$ Extremwert	$\Leftrightarrow$	I hat für $x = d$ Wendepunkt
f hat für $x = c$ Terrassenpunkt	$\Leftrightarrow$	I hat für $x = c$ Wendepunkt
f steigt für $x < d$ und $x > c$	$\Leftrightarrow$	I ist für $x < d$ und $x > c$ linksgekrümmt
f fällt für $d < x < c$	$\Leftrightarrow$	I ist für $d < x < c$ rechtsgekrümmt

Jede Integralfunktion I(x) von f(x) ergibt sich durch Verschiebung einer beliebigen Stammfunktion F(x) von f(x) in y-Richtung. Dabei muss die Verschiebung so erfolgen, dass bei der unteren Grenze a eine Nullstelle von I(x) auftritt.

Weitere Eigenschaften der Integralfunktion

- Jede Integralfunktion besitzt (mindestens) **eine Nullstelle**:

  $I(a) = 0$, da $\int_a^a f(t)\,dt = 0$ (obere Grenze = untere Grenze)

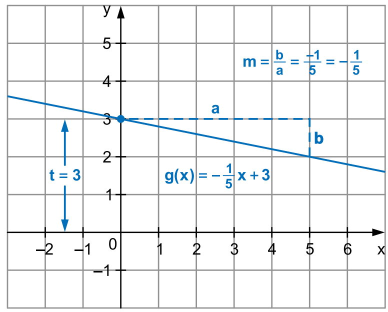
- I(x) kann **weitere Nullstellen**, z. B. $I(b) = 0$, besitzen, wenn die **Flächenbilanz** im Intervall [a; b] den Wert **0** hat (Fläche oberhalb der x-Achse = Fläche unterhalb der x-Achse).
- Der Graph von I(x) verläuft oberhalb der x-Achse, wenn $I(x) > 0$. Für die Fläche zwischen dem Graphen von f(x) und der x-Achse im Intervall [a; x] mit $x > a$ folgt:
  Die Fläche **oberhalb der x-Achse** ist **größer** als die Fläche unterhalb der x-Achse.
- Der Graph von I(x) verläuft unterhalb der x-Achse, wenn $I(x) < 0$. Für die Fläche zwischen dem Graphen von f(x) und der x-Achse im Intervall [a; x] mit $x > a$ folgt:
  Die Fläche **unterhalb der x-Achse** ist **größer** als die Fläche oberhalb der x-Achse.
- Wird in die „falsche“ = negative Richtung integriert, ist also $x < a$, so dreht sich das Vorzeichen in der Flächenbilanz um: Flächen oberhalb der x-Achse gehen negativ, Flächen unterhalb der x-Achse positiv in die Rechnung ein.

Auf einen Blick

Der Name sagt es bereits: Der Graph einer **linearen Funktion** ist eine **Gerade**.

$f(x) = mx + t$

Festgelegt ist die Gerade durch ihren **Schnittpunkt mit der y-Achse** (Achsenabschnitt t) und ein rechtwinkliges **Steigungsdreieck**. Das Verhältnis zwischen der senkrechten Kathete b und der waagrechten Kathete a (jeweils **mit** Vorzeichen ablesen!) entspricht der **Geradensteigung**: $m = \frac{b}{a}$



Grundeigenschaften

Funktion	$f(x) = mx + t$ $\quad$ $m =$ Steigung, $t =$ y-Achsenabschnitt
Definitionsbereich	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Verhalten an den Rändern	für $m > 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ für $m < 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
waagrechte Asymptoten	keine
senkrechte Asymptoten	keine
Wertebereich	für $m \neq 0$: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ für $m = 0$: $\mathbb{W} = \{t\}$
Symmetrie zum KOSY	für $m = 0$: achsensymmetrisch zur y-Achse für $t = 0$: punktsymmetrisch zum Ursprung für $m, t \neq 0$: keine
Nullstellen	für $m \neq 0$: genau eine Nullstelle $x_N = -\frac{t}{m}$
Ableitung	$f'(x) = m$
Monotonie	für $m > 0$: streng monoton steigend für $m < 0$: streng monoton fallend
Stammfunktion	$F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + tx + C$
Umkehrfunktion	für $m \neq 0$: $f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{t}{m}$ mit $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ für $m = 0$: keine