Mathematik

Auf einen Blick!

Stochastik

für Klausuren und Prüfungen

www.stark-verlag.de

STARK

Auf einen Blick

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$** ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung, dass Ereignis B gilt:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{mit } P(B) \neq 0$$

Zwei Ereignisse A und B sind **stochastisch unabhängig**, wenn die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Andernfalls nennt man A und B stochastisch abhängig.

Begriffe, Schreibweisen und Formeln

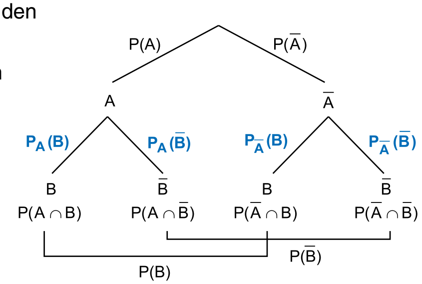
Veranschaulichung der bedingten Wahrscheinlichkeit im Baumdiagramm

- **Ab der 2. Stufe** stehen im Baumdiagramm auf den Ästen **bedingte Wahrscheinlichkeiten**.
- Die Wahrscheinlichkeit P(B) lässt sich über den **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit** berechnen:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) \end{aligned}$$

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ lässt sich über den **Satz von Bayes** berechnen:

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}$$



Bedingte Wahrscheinlichkeit für stochastisch unabhängige Ereignisse

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

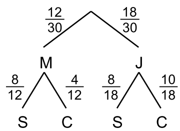
Beispielaufgaben

1. In einer Schulklasse sind 12 Mädchen und 18 Jungen. Die Schülerinnen und Schüler werden befragt, ob sie lieber Schokolade oder Chips essen. 8 Mädchen bevorzugen Schokolade. Von den Jungen essen 10 lieber Chips.
   a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar.
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein befragtes Kind lieber Schokolade isst.
   c) Es ist bekannt, dass ein zufällig ausgewähltes Klassenmitglied lieber Chips isst. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um einen Jungen handelt.
   d) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „Mädchen“ und „Schokolade“ stochastisch unabhängig sind.

2. Es sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben: $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}3$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$
   a) Stellen Sie eine Vierfeldertafel auf.
   b) Berechnen Sie $P_B(\overline{A})$.
   c) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

Lösung:

1. a) M: Mädchen
   J: Junge
   S: Schokolade
   C: Chips



Lassen Sie sich nicht verwirren: J bzw. C ist gleichbedeutend mit $\overline{M}$ bzw. $\overline{S}$.

b) $P(S) = P(M \cap S) + P(J \cap S)$

$= \frac{12}{30} \cdot \frac{8}{12} + \frac{18}{30} \cdot \frac{8}{18} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$

$\approx 0{,}5333 = 53{,}33\,\%$

c) $P_C(J) = \frac{P(J \cap C)}{P(C)} = \frac{P(J) \cdot P_J(C)}{P(M) \cdot P_M(C) + P(J) \cdot P_J(C)} = \frac{\frac{18}{30} \cdot \frac{10}{18}}{\frac{12}{30} \cdot \frac{4}{12} + \frac{18}{30} \cdot \frac{10}{18}}$

$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{15} + \frac{5}{15}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{7} = \frac{5}{7} \approx 0{,}7143 = 71{,}43\,\%$

d) $P(M \cap S) = P(M) \cdot P_M(S) = \frac{12}{30} \cdot \frac{8}{12} = \frac{4}{15}$

$P(M) \cdot P(S) = \frac{12}{30} \cdot \frac{8}{15} = \frac{16}{75}$

$\Rightarrow$ $P(M \cap S) \neq P(M) \cdot P(S)$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse „Mädchen“ und „Schokolade“ sind stochastisch abhängig.

2. a)

	A	$\overline{A}$	
B	0,2	0,1	**0,3**
$\overline{B}$	0,4	**0,3**	0,7
	0,6	0,4	**1**

Die blau eingetragenen Werte sind gegeben. Die restlichen erhält man durch passende Subtraktionen.

b) $P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333 = 33{,}33\,\%$

c) $P(A \cap B) = 0{,}2$

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$

$\Rightarrow$ $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig.

Worauf Sie achten sollten ...

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten lassen sich in der Vierfeldertafel nicht direkt eintragen. Jedoch können $P(A \cap B)$ und $P(B)$ direkt aus der Vierfeldertafel abgelesen werden.
- Verwechseln Sie nicht $P_B(A)$ mit $P(A \cap B)$:
  $P_B(A)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt unter der Bedingung, dass B bereits erfüllt ist. $P(A \cap B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B gleichzeitig eintreten.
- **Stochastisch unabhängig** bedeutet, dass sich die Ereignisse nicht gegenseitig beeinflussen. **Stochastisch unvereinbar** bedeutet, dass nicht beide Ereignisse gleichzeitig eintreten können.
- Für **stochastisch unvereinbare Ereignisse** gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Wenn die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, so sind auch die Ereignisse A und $\overline{B}$, $\overline{A}$ und B sowie $\overline{A}$ und $\overline{B}$ stochastisch unabhängig. Dies gilt analog, wenn A und B stochastisch abhängig sind.

Auf einen Blick

Eine **Zufallsgröße Z** ist eine Funktion, die jedem Element der Ergebnismenge eine reelle Zahl zuordnet.

Jedem dieser Werte lässt sich die Wahrscheinlichkeit **P(Z = z)** zuordnen, mit der z eintritt. Diese Zuordnung nennt man **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Z**.

Begriffe, Schreibweisen und Formeln

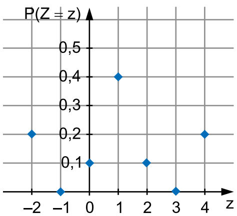
Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Z
Die **Summe** aller Wahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße Z ergibt **1**.

Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Tabelle

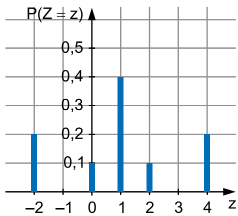
Z = z	–2	–1	0	1	2	3	4
P(Z = z)	0,2	0	0,1	0,4	0,1	0	0,2

Punktdiagramm



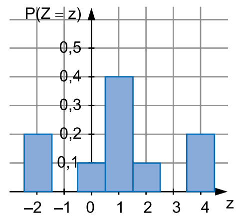
Die Wertepaare werden als **Punkte** eingetragen.
Die y-Koordinate entspricht der Wahrscheinlichkeit.

Stabdiagramm



Die Wertepaare werden als **Stäbe** eingetragen.
Die Länge der Stäbe entspricht jeweils der Wahrscheinlichkeit.

Histogramm



Die Wertepaare werden mit **Rechtecken** veranschaulicht.
Die Breite beträgt 1 und die Höhe entspricht jeweils der Wahrscheinlichkeit.

Zusammenhang: Zufallsgröße – Ereignis
Mehreren Ergebnissen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ kann der gleiche Wert z_0 der Zufallsgröße Z zugeordnet werden. Dann gilt:

$$P(Z = z_0) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_k) = P(A)$$

Dabei ist das **Ereignis** $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$.

Beispielaufgaben

1. Beim Training für das Elfmeterschießen schießt Paul fünfmal auf das Tor. Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl der Treffer.
   Geben Sie an, welche Werte die Zufallsgröße Z annehmen kann.

2. Bei einem Glücksspiel wird ein Würfel geworfen. Bei einer 1 oder 2 erhält man keine Auszahlung. Bei einer 3 oder 4 bekommt man 1 Euro. Bei einer 5 erhält man 3 Euro und bei einer 6 sogar 6 Euro. Der Einsatz pro Wurf beträgt 2 Euro.
   a) Stellen Sie den Gewinn des Spielers in einer Tabelle dar und geben Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung an.
   b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.

Lösung:

1. Paul kann 0-mal, 1-mal, 2-mal, 3-mal, 4-mal oder 5-mal treffen: $Z = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

2. a) Die Zufallsgröße Z beschreibt den Gewinn.

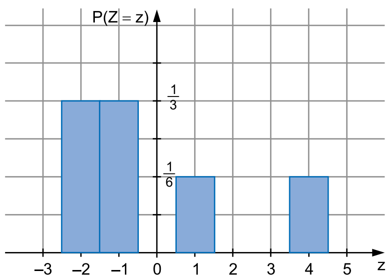
Würfelwurf	1	2	3	4	5	6
$Z = z$	–2 €	–2 €	–1 €	–1 €	1 €	4 €
$P(Z = z)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Gewinn = Auszahlung – Einsatz

Bezogen auf den Gewinn gilt daher:

$Z = z$	–2 €	–1 €	1 €	4 €
$P(Z = z)$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) Histogramm:



Worauf Sie achten sollten …

- Zufallsgrößen besitzen häufig auch andere Bezeichnungen, z. B. X oder Y.
- Zufallsgrößen werden auch **Zufallsvariablen** genannt.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird auch als **Wahrscheinlichkeitsfunktion** bezeichnet.
- Es wird zwischen **diskreten** und **stetigen** Wahrscheinlichkeitsverteilungen unterschieden. Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind nur für bestimmte Werte definiert und können Lücken haben. Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind für alle Werte des Intervalls definiert und weisen keine Lücken auf.
  Beispiel für eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung: **Binomialverteilung** [▶ S. 22 f.]
  Beispiel für eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung: **Normalverteilung** [▶ S. 24 f.]

Auf einen Blick

Für diskrete Zufallsgrößen Z, die nur eine begrenzte Anzahl von Werten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ annehmen, gilt:

Erwartungswert: $E(Z) = \mu = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot p_i = z_1 \cdot p_1 + z_2 \cdot p_2 + \ldots + z_n \cdot p_n$

Varianz: $Var(Z) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - \mu)^2 \cdot p_i = (z_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (z_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (z_n - \mu)^2 \cdot p_n$

Standardabweichung: $\sigma(Z) = \sqrt{Var(Z)}$

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung werden als **Kennzahlen** einer Zufallsgröße bezeichnet.

Begriffe, Schreibweisen und Formeln

Faires Spiel
Die Zufallsgröße Z beschreibt den Gewinn bei einem Spiel. Dieses Spiel heißt **fair**, wenn der **Erwartungswert E(Z) gleich null** ist.

Beispielaufgaben

1. a) Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsgröße X, wobei diese die gewürfelte Augenzahl bei einem einmaligen Wurf eines Laplace-Würfels beschreibt.
   b) Bei einem selbst geschnitzten Würfel ist folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben:

$Z = z$	1	2	3	4	5	6
$P(Z = z)$	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3

   Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.

2. Auf dem Jahrmarkt wird folgendes Glücksspiel angeboten: Aus einer Urne mit 4 blauen, 3 schwarzen, 2 weißen und 1 gelben Kugel wird eine Kugel gezogen. Der Einsatz für das Spiel beträgt 2 Euro. Bei blauen Kugeln wird nichts ausbezahlt, bei schwarzen Kugeln 1 Euro, bei weißen Kugeln 3 Euro und bei der gelben Kugel 10 Euro.
   a) Beurteilen Sie, ob es sich um ein faires Spiel handelt.
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn um weniger als 2 vom Erwartungswert abweicht.
   c) Bestimmen Sie, wie hoch die Auszahlung bei der gelben Kugel sein müsste, damit das Spiel fair ist.

Lösung:

1. a) Bei einem Laplace-Würfel haben alle Augenzahlen 1 bis 6 die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.
   Erwartungswert: $E(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3{,}5$

   Varianz:
   $Var(X) = \frac{1}{6} \cdot \left[(1 - 3{,}5)^2 + (2 - 3{,}5)^2 + (3 - 3{,}5)^2 + (4 - 3{,}5)^2 + (5 - 3{,}5)^2 + (6 - 3{,}5)^2\right] \approx 2{,}92$

   Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} \approx \sqrt{2{,}92} \approx 1{,}71$