Gut erklärt!
LERN-VIDEOS

Mathematik-KOMPAKT

Realschule 5.–10. Klasse

STARK

Die **Stufenzahlen** des **Zweiersystems** sind

$$\begin{aligned}
2^0 &= 1_{10} = 1_2\\
2^1 &= 2_{10} = 10_2\\
2^2 &= 4_{10} = 100_2\\
2^3 &= 8_{10} = 1\,000_2\\
2^4 &= 16_{10} = 10\,000_2\\
2^5 &= 32_{10} = 100\,000_2\\
2^6 &= 64_{10} = 1\,000\,000_2\\
2^7 &= 128_{10} = 10\,000\,000_2\\
2^8 &= 256_{10} = 100\,000\,000_2\\
2^9 &= 512_{10} = 1\,000\,000\,000_2\\
2^{10} &= 1\,024_{10} = 10\,000\,000\,000_2\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die tiefgestellten Zahlen 2 und 10 zeigen an, ob es sich um eine Darstellung hinsichtlich der Basis 2 oder 10 handelt.

Mithilfe dieser Stufenzahlen lässt sich jede natürliche Zahl in der Form

$a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$

schreiben, wobei die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die Werte 0 oder 1 annehmen und n eine natürliche Zahl ist. Damit ergibt sich die Dualdarstellung dieser Zahl zu

$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_2$.

Beispiel

$$\begin{aligned}
47 &= \overbrace{32} + \overbrace{8} + \overbrace{4} + \overbrace{2} + \overbrace{1}\\
&= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0\\
&= 101\,111_2
\end{aligned}$$

Umgekehrt erfolgt auch die Umrechnung einer Dual- in eine Dezimalzahl mithilfe der Stufenzahlen.

Beispiel

$$\begin{aligned}
&1\,001\,101_2\\
&= \underbrace{1 \cdot 2^6} + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + \underbrace{1 \cdot 2^3} + \underbrace{1 \cdot 2^2} + 0 \cdot 2^1 + \underbrace{1 \cdot 2^0}\\
&= 64 + 8 + 4 + 1\\
&= 77
\end{aligned}$$

Bei der Addition zweier Dualzahlen sind folgende Regeln zu beachten:

Rechenregeln für Dualzahlen

$0_2 + 0_2 = 0_2$

$0_2 + 1_2 = 1_2 + 0_2 = 1_2$

$1_2 + 1_2 = 10_2$

Beispiel

dual:

$$\begin{array}{r} 10011_2 \\ 11001_2 \\ +\quad 1\;\;\;11\;\; \\ \hline 101100_2 \end{array}$$

dezimal:

$$\begin{array}{r} 19 \\ 25 \\ +\quad 1\; \\ \hline 44 \end{array}$$

7 Römische Zahlen

Folgende Ziffern werden in der römischen Zahldarstellung verwendet:

Römische Ziffern

Die **Hauptzeichen** sind Stufenzahlen des Zehnersystems:

römisch	I	X	C	M
dezimal	1	10	100	1 000

Die Hälften der drei größten römischen Ziffern sind die **Nebenzeichen:**

römisch	V	L	D
dezimal	5	50	500

Im Gegensatz zu unserem Zehnersystem ist das römische Zahlensystem kein Stellenwertsystem, sondern ein **Additionssystem**. Es gelten folgende Regeln:

Regeln für römische Zahlzeichen

- Steht ein Zahlzeichen rechts von einem Zeichen mit gleichem oder höherem Wert, so werden die Werte der Zeichen addiert.
- Steht ein Zahlzeichen links von einem Zeichen mit höherem Wert, so wird das kleinere vom größeren subtrahiert.
- Von links nach rechts werden Tausender, Hunderter, Zehner und Einer aufgeschrieben.
- Es werden höchstens drei gleiche Hauptzeichen hintereinander notiert.
- Nebenzeichen werden nicht wiederholt.
- Nebenzeichen werden nicht vor ein Zeichen mit höherem Wert gesetzt.
- Vor einem Zeichen darf höchstens ein einziges Zeichen mit geringerem Wert stehen.
- Vor ein Haupt- oder Nebenzeichen darf nur das Hauptzeichen mit dem jeweils nächstkleineren Wert gesetzt werden.

Beispiel

1. $\mathrm{XI} = 10 + 1 = 11$
2. $\mathrm{IX} = 10 - 1 = 9$
3. $\mathrm{LXXXVIII} = 50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1 = 88$
4. $\mathrm{XCIX} = (100 - 10) + (10 - 1) = 90 + 9 = 99$
5. $\mathrm{MCDXIX} = 1\,000 + (500 - 100) + 10 + (10 - 1) = 1\,419$

Grundlagen des Rechnens

1 Grundrechenarten

Addition

$$\underbrace{\underset{\text{1. Summand}}{a} \quad \underset{\text{plus}}{+} \quad \underset{\text{2. Summand}}{b}}_{\text{Summe}} \quad \underset{=}{=} \quad \underset{\text{Wert der Summe}}{s}$$

Subtraktion

$$\underbrace{\underset{\text{Minuend}}{a} \quad \underset{\text{minus}}{-} \quad \underset{\text{Subtrahend}}{b}}_{\text{Differenz}} \quad \underset{=}{=} \quad \underset{\text{Wert der Differenz}}{d}$$

Multiplikation

$$\underbrace{\underset{\substack{\text{1. Faktor}\\ \text{Multiplikand}}}{a} \quad \underset{\text{mal}}{\cdot} \quad \underset{\substack{\text{2. Faktor}\\ \text{Multiplikator}}}{b}}_{\text{Produkt}} \quad \underset{=}{=} \quad \underset{\text{Wert des Produkts}}{p}$$

Division

$$\underbrace{\underset{\text{Dividend}}{a} \quad \underset{\text{geteilt durch}}{:} \quad \underset{\text{Divisor}}{b}}_{\text{Quotient}} \quad \underset{=}{=} \quad \underset{\text{Wert des Quotienten}}{q}$$

Hinsichtlich Multiplikation und Division nimmt die **Null** eine Sonderstellung ein:

- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- $0 : a = 0$
- $a : 0$ ist nicht definiert.

2 Rechengesetze

Allgemein gelten für die **Addition** und die **Multiplikation** drei Rechengesetze:

Kommutativgesetz

In einer Summe oder einem Produkt darf man die Summanden oder Faktoren vertauschen.

$a + b = b + a$ $\qquad$ $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz

Bei einer Summe oder einem Produkt von mehreren Zahlen spielt die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle.

$a + (b + c) = (a + b) + c$ $\qquad$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Distributivgesetz

Ein Faktor wird mit einer Summe multipliziert, indem man den Faktor mit jedem Summanden multipliziert und die Ergebnisse addiert.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\qquad$ $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

3 Rechnen mit Brüchen

Mit positiven und negativen **Brüchen** (rationalen Zahlen) rechnet man nach den folgenden Regeln:

Addition und Subtraktion

Hauptnenner suchen und erweitern:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

Multiplikation

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$