Gut erklärt!
LERN-VIDEOS

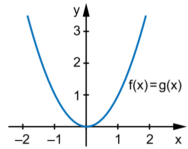
Analysis • Stochastik
Analytische Geometrie

Mathematik-KOMPAKT

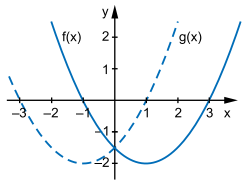
FOS • BOS

STARK

2. $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow$
$g(x) = f(-x) = (-x)^2 = x^2$
Der Graph von $f(x) = x^2$ ist symmetrisch zur y-Achse;
d. h., es gilt: $f(-x) = f(x)$



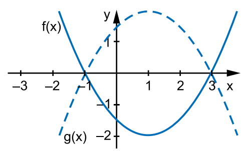
3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \quad \Rightarrow$
$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$



Spiegelung an der x-Achse
$f(x) \mapsto g(x) = -f(x)$

Beispiel

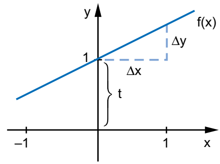
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \quad \Rightarrow$
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$



1.4 Spezielle Funktionen

Im Folgenden werden Funktionen mit ähnlichen Eigenschaften zu Gruppen zusammengefasst.

Die allgemeine lineare Funktion
$y = f(x) = mx + t, \quad D = \mathbb{R}$ m: Steigung
t: y-Achsenabschnitt



Im nebenstehenden Beispiel $y = \frac{1}{2}x + 1$ gilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}, \quad t = 1$$

Es gilt ferner, dass jede lineare Gleichung $ax + by + c = 0$ mit $b \neq 0$ eine Gerade als Graphen besitzt, da sie umgeformt werden kann:

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c \qquad \Big| :b$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + t$$

Beispiel

Formen Sie $2x - 3y + 2 = 0$ so um, dass die Form $y = mx + t$ entsteht. Zeichnen Sie den Graphen.

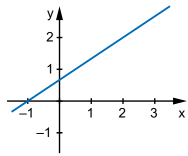
Lösung:

$$2x - 3y + 2 = 0$$

$$3y = 2x + 2$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$m = \frac{2}{3}, \ t = \frac{2}{3}$$



Die allgemeine quadratische Funktion

Die allgemeine quadratische Funktion f hat die Funktionsgleichung $y = f(x) = ax^2 + bx + c \ \wedge \ a \neq 0, D = \mathbb{R}$, ihr Graph heißt **Parabel**.

Besitzt die zugehörige Parabel den Scheitel $S(s_1 \,|\, s_2)$, so lässt sich die Funktion durch

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot (x - s_1)^2 + s_2$$

darstellen **(Scheitelform)**.

Besitzt die zugehörige Parabel die Schnittpunkte $N_1(x_1 \,|\, 0)$ und $N_2(x_2 \,|\, 0)$ mit der x-Achse, so lässt sich der Funktionsterm in **Linearfaktoren** zerlegen zu

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Beispiel

1. $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4,\ D_f = \mathbb{R}$

Schnittpunkte mit der x-Achse und Aufspaltung in Linearfaktoren:

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$$

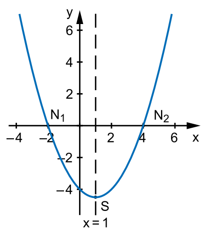
$$x_{1;2} = \frac{1}{1}(1 \pm \sqrt{1+8}) = 1 \pm 3$$

$$x_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad N_1(-2\,|\,0)$$

$$x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad N_2(4\,|\,0)$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = \frac{1}{2}(x+2)(x-4)$$

Scheitelform:
Die x-Koordinate des Scheitels ergibt sich als arithmetisches Mittel der Nullstellen:



$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Also in diesem Beispiel:

$$x_S = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Die y-Koordinate des Scheitels erhält man durch Einsetzen der x-Koordinate in den Funktionsterm:

$$y_S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 - 4 = -\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Scheitel } S\left(1 \,\middle|\, -\frac{9}{2}\right)$$

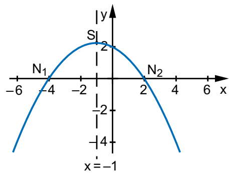
$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2} \quad \text{(Scheitelform)}$$

2. Gegeben ist die quadratische Funktion
$f\colon\ x \mapsto y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2,\ D_f = \mathbb{R}$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels S, die Wertemenge und die Symmetrieachse, und geben Sie eine Aufspaltung in Linearfaktoren sowie die Bereiche mit $y \geq 0$ bzw. $y \leq 0$ an. Zeichnen Sie die zugehörige Parabel.

Lösung:
Scheitelbestimmung:
Für die x-Koordinate des Scheitels einer Parabel mit der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ gilt:

$x_S = \frac{-b}{2a}$



Damit erhält man in diesem Beispiel:

$$x_S = \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = -1 \text{ und}$$

$$y_S = -\frac{1}{4} \cdot (-1)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) + 2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Scheitel } S\left(-1 \,\middle|\, \frac{9}{4}\right)$$

Aufspaltung in Linearfaktoren:

$$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0 \qquad \big| \cdot (-4)$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{4 + 32}) = \frac{1}{2}(-2 \pm 6)$$

$$x_1 = -4 \quad \Rightarrow \quad N_1(-4 \,|\, 0)$$

$$x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad N_2(2 \,|\, 0)$$

$$y = -\frac{1}{4}(x + 4) \cdot (x - 2)$$

$$y \geq 0 \text{ für } x \in [-4;\, 2]$$

$$y \leq 0 \text{ für } x \in \,]-\infty;\, -4] \cup [2;\, \infty[$$

Ganzrationale Funktionen
Eine Funktion f ist eine ganzrationale Funktion, wenn ihr Funktionsterm ein Polynom in x ist. Für jede ganzrationale Funktion f gilt: $D_f = \mathbb{R}$.
Die höchste vorkommende Potenz von x bestimmt den **Grad** der ganzrationalen Funktion. Die Zahl vor der höchsten Potenz von x wird auch **Leitkoeffizient** genannt.

Beispiel

1. $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 6$
   ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades
   mit dem Leitkoeffizient 5.

2. $f(x) = x^5 - x + 1$
   ist eine ganzrationale Funktion 5. Grades
   mit dem Leitkoeffizient 1.

Bei ganzrationalen Funktionen kann das Symmetrieverhalten besonders einfach festgestellt werden.

> Der Graph G_g einer ganzrationalen Funktion g ist **achsensymmetrisch** zur y-Achse, wenn der Funktionsterm g(x) **nur gerade Potenzen von x** enthält.
> Daher heißt eine solche Funktion auch **gerade** Funktion.

Beispiel

Der Graph G_g der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 3$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Hinweis: Ein konstanter Summand zählt zu den geraden Potenzen von x, da man sich den Faktor x^0 ergänzt denken kann:
$g(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 3 \cdot x^0$

> Der Graph G_h einer ganzrationalen Funktion h ist **punktsymmetrisch** zum Ursprung, wenn der Funktionsterm h(x) **nur ungerade Potenzen von x** enthält.
> Eine solche Funktion heißt auch **ungerade** Funktion.

Beispiel

Der Graph G_h der Funktion h mit $h(x) = -2x^5 + \frac{1}{2}x^3 - x$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Die meisten ganzrationalen Funktionen sind jedoch weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.