Analysis

1 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

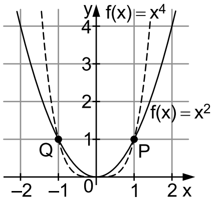
1.1 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form: $f\colon x \mapsto x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$
Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

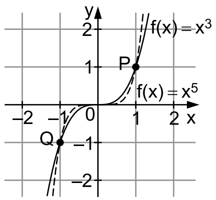
- Exponent positiv: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R}$
  Die Graphen sind **Parabeln**.
- Exponent negativ: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
  Die Graphen sind **Hyperbeln**.

Graphenverläufe

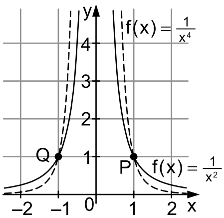
Parabeln: n gerade; Werte in $\mathbb{R}_+$



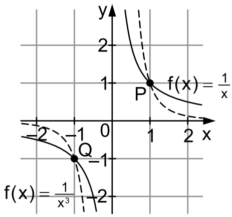
n ungerade; Werte in $\mathbb{R}$



Hyperbeln: n gerade; Werte in $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$

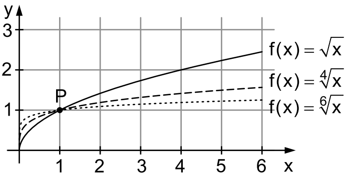


n ungerade; Werte in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$



Wurzelfunktion
Ist der Exponent r ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:
$f\colon x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2;\ x \in \mathbb{R}_+$ (n-te Wurzelfunktion)

1. G_f verläuft durch $P(1 \mid 1)$.
2. Einzige Nullstelle: $x = 0$
3. Werte liegen in $\mathbb{R}_+$
4. Je größer n, desto
   - flacher verläuft G_f für $x > 1$.
   - steiler nähert sich G_f dem Koordinatenursprung.



1.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form:

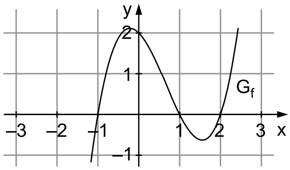
$$f\colon x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0;\ \ x \in \mathbb{R}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Die Werte $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.
Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 1.6).

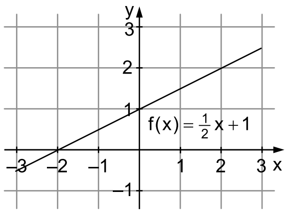
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstellen bei $x = 2$, $x = -1$ und $x = 1$

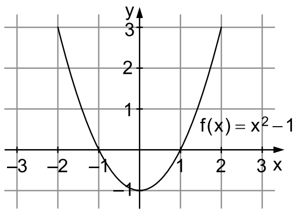


Spezialfälle

Lineare Funktion:
$f(x) = mx + t$ (Grad 1)
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ (Grad 2)
Graph ist eine Parabel.



1.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)

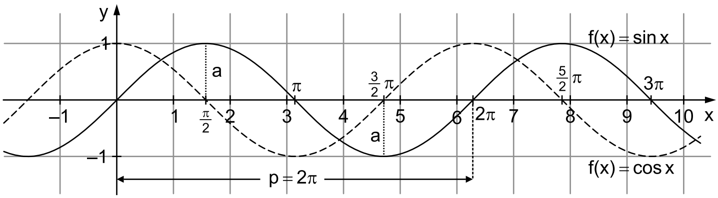
Trigonometrische Funktionen bieten sich bei der Beschreibung und Modellierung periodischer Vorgänge an.

Unter der allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion versteht man eine Funktion der Form:
$f\colon x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ bzw. $f\colon x \mapsto a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$
für $x \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$, $b \neq 0$
Werte liegen im Bereich $[-a + d; a + d]$ bzw. $[a + d; -a + d]$.

Bedeutung der Parameter (vgl. auch Abschnitt 1.5)

a: bestimmt die Amplitude ($\hat{=}$ „maximaler Ausschlag nach oben bzw. unten um $|a|$“)
b: bestimmt die Periode ($\hat{=}$ „eine Schwingung“), $p = \frac{2\pi}{|b|}$
c: Verschiebung längs x-Achse
d: Verschiebung längs y-Achse

Grundfunktionen sin x und cos x



$a = 1$; $p = 2\pi$; Werte liegen im Bereich [–1; 1].

Nullstellen

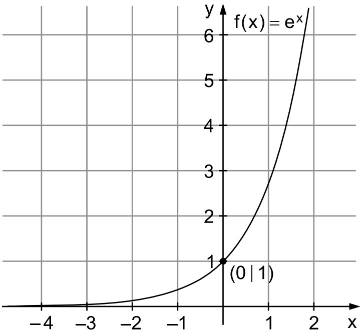
Der Abstand zwischen zwei Nullstellen einer Sinus- bzw. Kosinusfunktion entspricht einer halben Periodenlänge und es gilt:

$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots)$

$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \left(\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots\right)$

1.4 Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion lautet $f\colon x \mapsto e^x;\ x \in \mathbb{R}$.
- Es gilt: $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Werte liegen in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$)
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ($y = 0$ ist waagrechte Asymptote) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



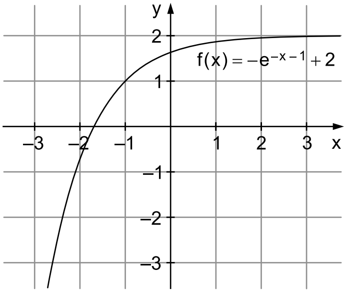
Bei der Untersuchung von Exponentialfunktionen (Bestimmung von Nullstellen etc.) müssen oft Exponentialgleichungen gelöst werden; dabei spielt die Umkehrung der e-Funktion (der natürliche Logarithmus ln x) eine wichtige Rolle, vgl. Kapitel „Gleichungen“, Abschnitt 1.2.

1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x+1) \cdot e^x;\ x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1) \cdot e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \qquad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \end{aligned}$$

2. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = -e^{-x-1} + 2;\ x \in \mathbb{R}$.

Ausgehend vom Graphen oben (vgl. Abschnitt 1.5):
- Verschiebung um +1 in x-Richtung (nach rechts)
- Spiegelung an der y-Achse
- Spiegelung an der x-Achse
- Verschiebung um +2 in y-Richtung (nach oben)
- Waagrechte Asymptote $y = 2$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} (-e^{-x-1} + 2) = 2$

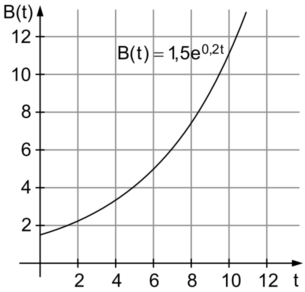


Exponentialfunktionen finden oft Anwendung bei der Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen.

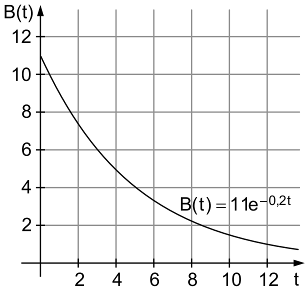
Exponentielle Wachstumsfunktion: $B(t) = B_0 \cdot e^{k \cdot t}$
Exponentielle Zerfallsfunktion: $B(t) = B_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

B_0: Startwert für $t = 0$; $B_0 > 0$
t: Zeit ab einem bestimmten Startpunkt; $t \geq 0$
k: Wachstums- bzw. Zerfallskonstante; $k > 0$
B(t): Wert nach der Zeit t

Exponentielles Wachstum



Exponentieller Zerfall
(Asymptote $y = 0$ für $t \to \infty$)



Eine Tomatenstaude hat zum Zeitpunkt des Auspflanzens eine Höhe von 8 cm. Nach 30 Tagen ist sie schon 14 cm hoch. Das Wachstum der Staude lässt sich in den ersten zwei Monaten näherungsweise durch eine Exponentialfunktion mit einem Term der Form $B(t) = B_0 \cdot e^{k \cdot t}$ (t in Tagen, B(t) in Zentimetern) beschreiben. Bestimmen Sie k.

Es gilt: $B_0 = B(0) = 8$; $B(30) = 14$

Berechnung von k:

$$B(30) = 8 \cdot e^{k \cdot 30} = 14$$

$$e^{k \cdot 30} = \frac{14}{8} \qquad | \ln$$

$$k \cdot 30 = \ln\left(\frac{14}{8}\right)$$

$$k = \frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{14}{8}\right) \approx 0{,}0187$$

Die Wachstumsfunktion lautet: $B(t) = 8 \cdot e^{0{,}0187 \cdot t}$