2.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)

Unter der allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion versteht man eine Funktion der Form:

$f\colon x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ bzw. $f\colon x \mapsto a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$, $b \neq 0$

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Wertemenge: $\mathbb{W}_f = [-a + d; a + d]$ bzw. $\mathbb{W}_f = [a + d; -a + d]$

Bedeutung der Parameter (vgl. auch Abschnitt 2.5)

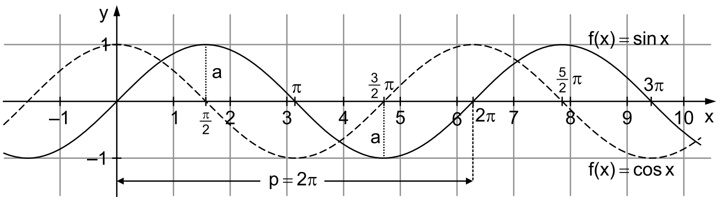
a: bestimmt die Amplitude ($\triangleq$ „maximaler Ausschlag nach oben bzw. unten um $|a|$“)

b: bestimmt die Periode ($\triangleq$ „eine Schwingung“), $p = \frac{2\pi}{|b|}$

c: Verschiebung längs x-Achse (Phasenverschiebung)

d: Verschiebung längs y-Achse

Grundfunktionen sin x und cos x



$\mathbb{W}_f = [-1; 1]$; $a = 1$; $p = 2\pi$

Nullstellen

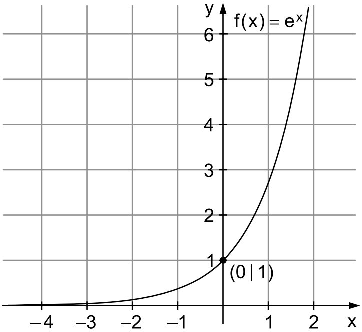
Der Abstand zwischen zwei Nullstellen einer Sinus- bzw. Kosinusfunktion entspricht einer halben Periodenlänge und es gilt:

$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots)$

$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \left(\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots\right)$

2.4 Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion lautet $f\colon x \mapsto e^x$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
  Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$ $(e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R})$
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ($y = 0$ ist waagrechte Asymptote) $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



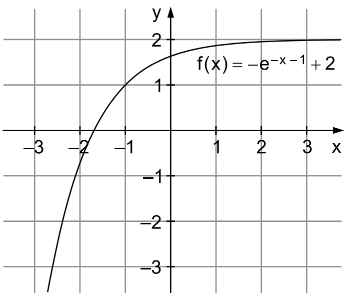
Bei der Untersuchung von Exponentialfunktionen (Bestimmung von Nullstellen etc.) müssen oft Exponentialgleichungen gelöst werden; dabei spielt die Umkehrung der e-Funktion (der natürliche Logarithmus ln x) eine wichtige Rolle, vgl. Abschnitt 1.2.

1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x+1) \cdot e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1) \cdot e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \qquad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \end{aligned}$$

2. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = -e^{-x-1} + 2$; $x \in \mathbb{R}$.

Ausgehend vom Graphen oben (vgl. Abschnitt 2.5):
- Verschiebung um +1 in x-Richtung (nach rechts)
- Spiegelung an der y-Achse
- Spiegelung an der x-Achse
- Verschiebung um +2 in y-Richtung (nach oben)
- Waagrechte Asymptote $y = 2$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} (-e^{-x-1} + 2) = 2$

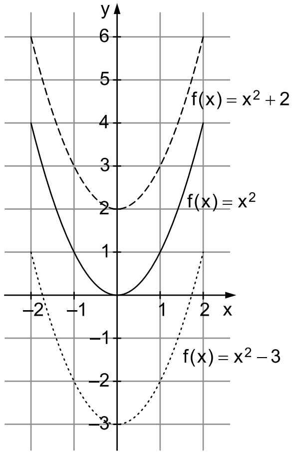


2.5 Entwicklung von Funktionen

Verschiebung von G_f in y-Richtung

Der Graph der Funktion $f(x) + d$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x)$ durch Verschiebung um $|d|$ Längeneinheiten in y-Richtung:

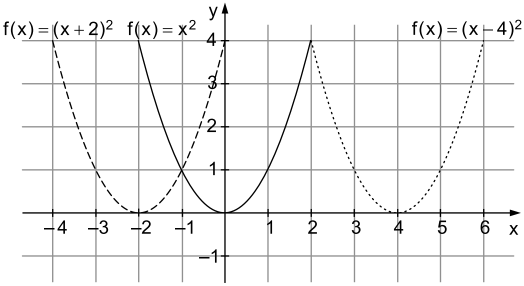
$f(x) \to f(x) + d$: $d > 0 \to$ Verschiebung nach oben
$d < 0 \to$ Verschiebung nach unten



Verschiebung von G_f in x-Richtung

Der Graph der Funktion $f(x + c)$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x)$ durch Verschiebung um $|c|$ Längeneinheiten in x-Richtung:

$f(x) \to f(x + c)$: $c > 0 \to$ Verschiebung nach links
$c < 0 \to$ Verschiebung nach rechts

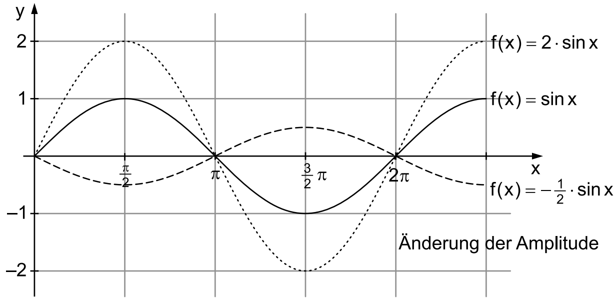


Streckung/Stauchung von G_f in y-Richtung

Der Graph der Funktion $a \cdot f(x)$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x)$ durch vertikale Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor $|a|$:

$f(x) \to a \cdot f(x)$ mit $a > 0$: $a > 1 \to$ Streckung
$0 < a < 1 \to$ Stauchung

$f(x) \to -a \cdot f(x)$: zusätzliche Spiegelung an der x-Achse

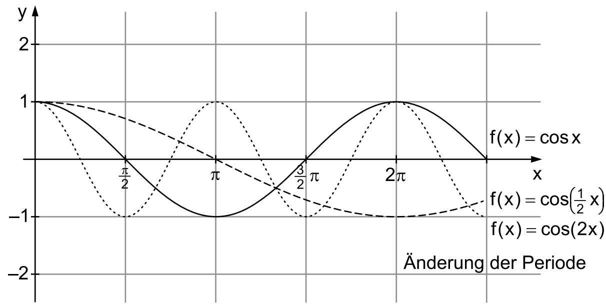


Streckung/Stauchung von G_f in x-Richtung

Der Graph der Funktion $f(b \cdot x)$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x)$ durch horizontale Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor $|b|$:

$f(x) \to f(b \cdot x)$ mit $b > 0$: $b > 1 \to$ Stauchung
$0 < b < 1 \to$ Streckung

$f(x) \to f(-b \cdot x)$: zusätzliche Spiegelung an der y-Achse



Durch Kombination der verschiedenen Änderungen erhält man aus den Grundfunktionen zahlreiche neue Funktionen.

2.6 Vielfachheit von Nullstellen

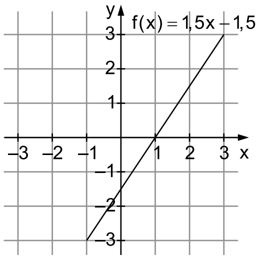
Nullstellen ungerader Ordnung

- Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 eine Nullstelle ungerader Ordnung, wenn der zugehörige Linearfaktor $(x - x_0)$ in der Linearfaktorzerlegung von f(x) eine ungerade Potenz (1, 3, 5, …) besitzt.
- Der Graph G_f weist bei x_0 einen Vorzeichenwechsel (VZW) auf.

Nullstellen gerader Ordnung

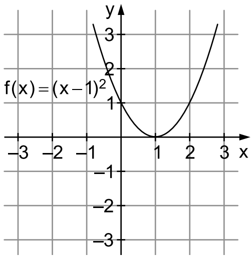
- Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 eine Nullstelle gerader Ordnung, wenn der zugehörige Linearfaktor $(x - x_0)$ in der Linearfaktorzerlegung von f(x) eine gerade Potenz (2, 4, 6, …) besitzt.
- Der Graph G_f weist bei x_0 keinen Vorzeichenwechsel (VZW) auf.

einfache Nullstelle bei $x = 1$



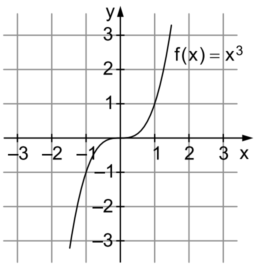
Nullstelle mit VZW;
G_f schneidet die x-Achse.

doppelte Nullstelle bei $x = 1$



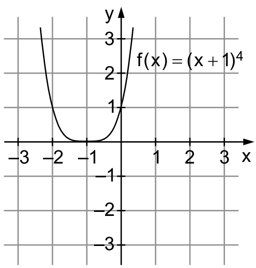
Nullstelle ohne VZW;
G_f berührt die x-Achse.

dreifache Nullstelle bei $x = 0$



Nullstelle mit VZW;
G_f verläuft durch die x-Achse.

vierfache Nullstelle bei $x = -1$



Nullstelle ohne VZW;
G_f berührt die x-Achse.