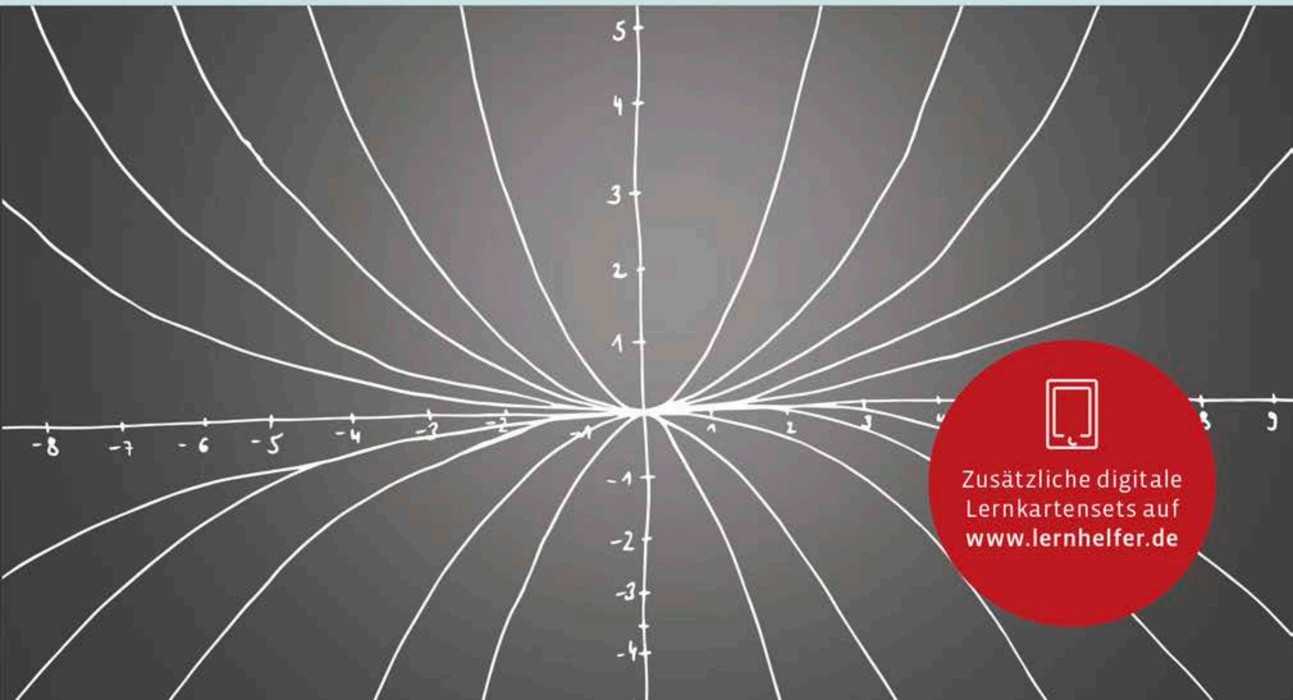
9. Klasse • Mathematik

DUDEN

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

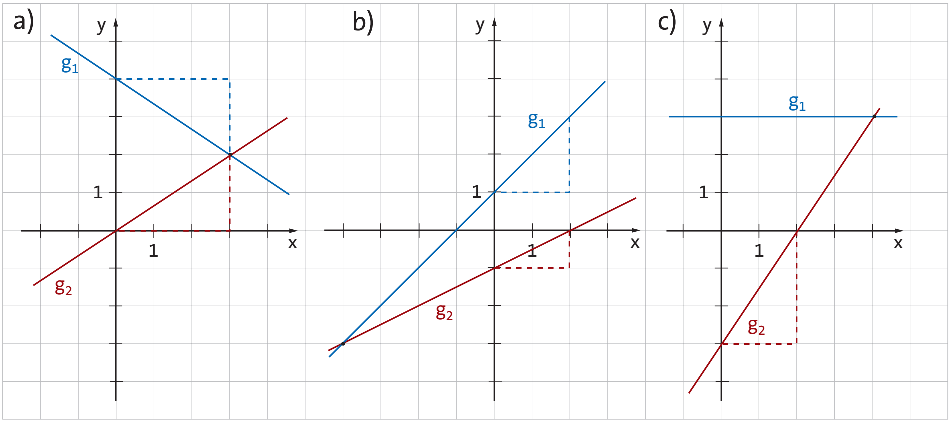
9. Klasse
Mathematik

Dein Weg zu besseren Noten!



Zusätzliche digitale Lernkartensets auf www.lernhelfer.de

ÜBUNG 5 **Lies die Koordinaten der Schnittpunkte ab. Bestimme danach jeweils die zugehörigen Funktionsgleichungen mithilfe der eingezeichneten Steigungsdreiecke und überprüfe rechnerisch, ob der durch Ablesen ermittelte Punkt zu den beiden Funktionsgraphen gehört.**



ÜBUNG 6 **Löse die Gleichungen jeweils nach der Variablen y auf. Entscheide, ob das entstandene LGS Lösungen hat. Bestimme die Anzahl der Lösungen. Hinweis: Du kannst die Gleichungen der linearen Funktionen auch grafisch darstellen. Bestimme jeweils die Lösungsmenge.**

a) (I) $4x - y + 2 = 0$
(II) $3x + y - 5 = 0$

b) (I) $2x - y = 4$
(II) $-6x = -(12 + y)$

c) (I) $-6x + y = 5$
(II) $21x = 3{,}5y$

ÜBUNG 7 **Löse die linearen Gleichungssysteme grafisch.**

a) (I) $y = -\frac{3}{2}x + 4$
(II) $y = -2x + 3$

b) (I) $y = 2x - 7$
(II) $6x = 6 - 2y$

c) (I) $\frac{1}{2}x = 2 - \frac{1}{3}y$
(II) $\frac{1}{3}x - \frac{7}{3} = -\frac{1}{2}y$

d) (I) $2x + 3y = 6$
(II) $2x - 3y = 6$

e) (I) $3x - 4y = 16$
(II) $-3x + 2y = -14$

f) (I) $4y + x = 6$
(II) $x = 6 - 4y$

ÜBUNG 8 **Zeichne die Gerade g_1 mit der Gleichung $2x - y + 4 = 0$. Zeichne durch den Punkt P (4|5) eine zweite Gerade g_2 bzw. g_3 so, dass gilt:**

a) g_1 und g_2 sind parallel, g_2 geht durch P (4|5).
b) g_1 und g_3 schneiden sich im Punkt P (–3|–2); g_3 geht durch P (4|5).
c) Gib die linearen Gleichungen zu den Geraden aus a) und b) an.

ÜBEN

2.3 LGS rechnerisch lösen

Additionsverfahren

1. Forme jede Gleichung so um, dass ein Koeffizient der ersten Gleichung und der entsprechende Koeffizient der zweiten Gleichung Gegenzahlen sind.
2. Addiere die Gleichungen; eine der beiden Variablen fällt weg. Es entsteht eine Gleichung mit nur einer Variablen.
3. Löse diese Gleichung durch Äquivalenzumformungen.
4. Setze den Wert, den du in 3. erhalten hast, in eine der Ausgangsgleichungen ein, bestimme so die andere Variable.
5. Führe eine Probe mit beiden Ausgangsgleichungen durch.

(I) $9x + 13y = 75$ (II) $12x - 41y = -75$

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 9x + 13y = 75 & |\cdot(-4) \\ \text{(II)} & 12x - 41y = -75 & |\cdot 3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{llr} 1. & \text{(I)} & -36x - 52y = -300 \\ & \text{(II)} & 36x - 123y = -225 \end{array}\right] +$$

$$\begin{array}{ll} 2. & -175y = -525 \\ 3. & y = 3 \\ 4. & 9x + 13 \cdot 3 = 75;\ x = 4 \\ 5.\ \text{(I)} & 9 \cdot 4 + 13 \cdot 3 = 75 \\ \ \ \ \text{(II)} & 12 \cdot 4 - 41 \cdot 3 = -75 \end{array}$$

$x = 4;\ y = 3$

Lösung: $(4|3)$; $L = \{(4|3)\}$

Einsetzungsverfahren

1. Löse eine der beiden Gleichungen nach einer der Variablen, z. B. nach y, auf.
2. Setze die rechte Seite dieser Gleichung für y in die andere Gleichung ein. Es entsteht eine Gleichung mit einer Variablen.
3. Löse diese Gleichung nach x auf.
4. Setze den erhaltenen Wert in eine der Ausgangsgleichungen ein, bestimme so die andere Variable.
5. Führe eine Probe mit beiden Ausgangsgleichungen durch.

(I) $2x - y + 3 = 0$ (II) $25 = 2x - 5y$

$$\begin{array}{lrl} 1. & \text{(I)} & y = 2x + 3 \\ 2.\ \text{einsetzen in (II)} & & 25 = 2x - 5(2x + 3) \\ 3. & & x = -5 \\ 4. & \text{(I)} & y = 2 \cdot (-5) + 3 = -7 \\ 5.\ \text{(I)}\ 2 \cdot (-5) - (-7) + 3 = 0 & & \\ \ \ \ \text{(II)}\ 25 = 2 \cdot (-5) - 5 \cdot (-7) & & \end{array}$$

$x = -5;\ y = -7$

Lösung: $(-5|-7)$; $L = \{(-5|-7)\}$

Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren löst du beide Gleichungen nach derselben Variablen auf und setzt die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleich.
Löse die entstandene Gleichung.
Die zweite Variable erhältst du durch Einsetzen in die Ausgangsgleichungen.

Hinweis: Vergiss die Probe nicht!

(I) $y = 2x + 5$ (II) $y = -3x - 22{,}5$

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= -3x - 22{,}5 \\ 5x &= -27{,}5 \\ x &= -5{,}5 \\ y &= 2 \cdot (-5{,}5) + 5 = -6 \end{aligned}$$

$x = -5{,}5;\ y = -6$

Lösung: $(-5{,}5|-6)$; $L = \{(-5{,}5|-6)\}$

WISSEN

ÜBUNG 9 **Löse die Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren.**

a) (I) $3x + 4y = 18$
(II) $3x + 2y = 12$

b) (I) $3x + 2y = -2$
(II) $-5x + 3y = 6{,}5$

c) (I) $y + 2x = 6$
(II) $3y + 4x - 14 = 0$

ÜBUNG 10 **Löse die Gleichungssysteme mit dem Einsetzungsverfahren.**

a) (I) $y + 2x = 6$
(II) $3y + 4x - 14 = 0$

b) (I) $y + 2x = 4$
(II) $x - 5{,}5 = -4y$

c) (I) $2y - 10x = 4{,}5$
(II) $35x - 7y = 15{,}75$

ÜBUNG 11 **Löse die Gleichungssysteme. Entscheide jeweils, welches der drei Lösungsverfahren du anwenden willst.**

a) (I) $3x + y = 9$
(II) $2x - y = -1$

b) (I) $5x + 7 = 0$
(II) $5(x - 3) - 24y = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)$

c) (I) $5(x + 2) - 3(y + 1) = 23$
(II) $3(x - 2) + 5(y - 1) = 19$

ÜBUNG 12 **Die Punkte A(−1|−4) und B(5|7) liegen auf einer Geraden im Koordinatensystem. Berechne mithilfe eines Gleichungssystems die zugehörige Gleichung.**

WISSEN

Lösen von Sachaufgaben

1. Lies den Text vollständig und sorgfältig. Welche Informationen brauchst du zur Lösung? Veranschauliche dir den Sachverhalt evtl. mithilfe von Markierungen im Text oder anhand einer Skizze.
2. Drücke unbekannte Zahlen oder Größen durch Variablen aus. Beschreibe Zusammenhänge durch Terme und bilde Gleichungen bzw. Gleichungssysteme.
3. Löse diese anschließend.

Prüfe die Lösung anhand des Aufgabentextes und formuliere eine Antwort.

Ein Campingplatz vermietet Hütten für 3 Personen und Hütten für 5 Personen. Für 41 Kinder werden 11 Hütten bestellt. Wie viele Hütten jeder Art werden benötigt?

x: Anzahl der Hütten für 3 Kinder;
y: Anzahl der Hütten für 5 Kinder
Gleichungen und Gleichungssystem:
(I) $x + y = 11$ (II) $3x + 5y = 41$

(I) nach y auflösen: $y = 11 - x$
In (II) einsetzen: $3x + 5(11 - x) = 41$
$x = 7$; $y = 4$, Lösung: $(7|4)$; $L = \{(7|4)\}$

Für 41 Kinder werden 7 Hütten für 3 Personen und 4 Hütten für 5 Personen benötigt.

ÜBUNG 13 **Ein Jäger hat im Laufe der Jahre Hasen und Rebhühner gejagt. Insgesamt waren es 20 Tiere mit 52 Beinen. Wie viele Hasen waren dabei?**

ÜBUNG 14 **Die Summe zweier Zahlen sei 52. Die Differenz aus dem Dreifachen der einen und dem Fünffachen der anderen Zahl sei 100. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?**

2.4 LGS mit drei Variablen

Um ein LGS mit drei Gleichungen und drei Variablen zu lösen, eliminiert man aus *einer Gleichung keine* Variable, aus der *zweiten Gleichung eine* Variable und aus der *dritten Gleichung zwei* Variablen: Man „bringt das LGS in **Dreiecksform**".

Lösungen eines solchen LGS mit drei Gleichungen haben die Form $(x|y|z)$ und erfüllen jede der drei Gleichungen.

Das folgende LGS ist bereits in Dreiecksform angegeben:

(I) $\mathbf{x + 2y - 2z = 12}$
(II) $0 + \mathbf{2y + 3z = 0}$
(III) $0 + 0 \mathbf{- 3z = 6}$

$\mathbf{z = -2}$; durch Einsetzen in (II) erhält man:
$2y - 6 = 0$; $\mathbf{y = 3}$; durch Einsetzen in (I) erhält man:
$x + 6 + 4 = 12$; $\mathbf{x = 2}$
Lösung: $(2|3|-2)$; $L = \{(2|3|-2)\}$

Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Variablen haben wie Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen entweder

- keine Lösung oder
- eine einzige Lösung oder
- unendlich viele Lösungen.

Beispiel für ein unlösbares System:

(I) $x + 2y + 2z = 2$
(II) $x + 3y + 2z = 5$
(III) $x + 2z = 0$

Umformungen führen zu:

(I) $x + 2y + 2z = 2$
(II') $-y = -3$
(III') $2y = 2$

An den letzten Gleichungen (II') und (III') erkennst du die Unlösbarkeit.

Das Gaußverfahren

… zur Lösung eines LGS mit **drei Gleichungen und drei Variablen:**
1. Ordne mithilfe von Äquivalenzumformungen so, dass auf der rechten Seite jeweils nur noch das absolute Glied steht.
2. Eliminiere die Variablen schrittweise.

Beachte: Die Variablen werden mit dem Additionsverfahren oder mit dem Einsetzungsverfahren eliminiert.

3. Es wird eine Gleichung mit drei und eine Gleichung mit zwei Variablen beibehalten. Aus der dritten Gleichung werden insgesamt zwei Variablen eliminiert. Es entsteht die **Dreiecksform.**
4. Ein LGS in Dreiecksform kann durch Einsetzen (wie im Beispiel oben rechts auf dieser Seite) leicht gelöst werden.
5. Führe eine Probe mit allen Ausgangsgleichungen durch und gib die Lösungsmenge an.

(I) $4x + y = 2z$
(II) $3x - 16 = -2y - 3z$
(III) $5x = 12 + y - 3z$

1. (I) $4x + y - 2z = 0 \quad | \cdot (-3) \quad \cdot (+5)$
(II) $3x + 2y + 3z = 16 \quad | \cdot (+4)$ +
(III) $5x - y + 3z = 12 \quad \cdot (-4)$ +

2. (I) $4x + y - 2z = 0$
(II') $0 + 5y + 18z = 64 \quad | \cdot (-9)$
(III') $0 + 9y - 22z = -48 \quad | \cdot (+5)$ +

3. (I) $4x + y - 2z = 0$
(II') $0 + 5y + 18z = 64$
(III'') $0 + 0 - 272z = -816$

4. Aus $-272z = -816$ folgt: $z = 3$
Aus $5y + 18z = 64$ folgt: $y = 2$
Aus $2x - y + z = 3$ folgt: $x = 1$

5. Das LGS hat genau eine Lösung: $(1|2|3)$
$L = \{(1|2|3)\}$

ÜBUNG 15 **Welches ist die Lösung des LGS?**

(I) $x + y - z = 7$
(II) $2x - y + z = 8$
(III) $3x + 2y - z = 20$

a) $(1|4|5)$ b) $(4|3|1)$ c) $(1|3|5)$
d) $(5|4|1)$ e) $(8|1|2)$ f) $(5|3|1)$
g) $(11|7|11)$

ÜBUNG 16 **Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme.**

a) (I) $x + y + z = 18$
(II) $2y - z = 3$
(III) $z = 7$

b) (I) $x + y + z = 2$
(II) $2x + y = 5$
(III) $2y = -3z$

c) (I) $x + 2y - z + 3 = 0$
(II) $4x - y = z$
(III) $2(2x + z) + y = 12$

ÜBUNG 17 **Bringe alle Gleichungen zunächst auf die Form $ax + by + cz = d$. Löse dann mit dem Gaußverfahren.**

a) (I) $x - (y + 2) = 3z + 16$
(II) $y - (x - z) = -2$
(III) $z + (x - 4) = 2y - 2$

b) (I) $2x + 3(y - z) = 2$
(II) $3(x + y) - 2(x + z) = 4$
(III) $5(y - z) - 3(x - y) = -42$

ÜBUNG 18 **Löse das Gleichungssystem mit dem Gaußverfahren und führe eine Probe durch.**

(I) $-x + 3y + 2z = 7$
(II) $3x - 2y + 4z = -17$
(III) $2x + y - 4z = 0$

ÜBEN

WISSEN

Lösen einer Sachaufgabe am konkreten Beispiel

1. **Aufgabenstellung sorgfältig lesen, Informationen markieren:** Finn, Florian und Marie planen eine Fete und haben unabhängig voneinander im selben Geschäft eingekauft. Finn hat für 10 Flaschen Cola, 8 Schokoriegel und 7 Eistüten 22,05 € bezahlt. Florian hat für 16,30 € 12 Flaschen Cola, 6 Schokoriegel und 2 Eistüten bekommen. Marie musste für 8 Flaschen Cola, 4 Schokoriegel und 11 Eistüten 22,95 € bezahlen.
Wie viel kostet eine Flasche Cola, wie viel ein Schokoriegel und wie viel ein Eis?
2. **Variablen festlegen:** x: Anzahl der Colaflaschen, y: Anzahl der Riegel, z: Anzahl der Eistüten
3. **Aufstellen und Lösen des LGS:**

(I) $10x + 8y + 7z = 22{,}05 \quad | \cdot 12 \quad | \cdot 8$
(II) $12x + 6y + 2z = 16{,}30 \quad | \cdot (-10)$ +
(III) $8x + 4y + 11z = 22{,}95 \quad | \cdot (-10)$ +

(I) $10x + 8y + 7z = 22{,}05$
(II') $0 + 36y + 64z = 101{,}60 \; | \cdot 2$
(III') $0 + 24y - 54z = -53{,}10 \; | \cdot (-3)$ +

(I) $10x + 8y + 7z = 22{,}05$
(II') $0 + 36y + 64z = 101{,}60$
(III'') $0 + 0 + 290z = 362{,}50$

Hieraus folgt $z = 1{,}25$; $y = 0{,}60$; $x = 0{,}85$; $L = \{(0{,}85|0{,}60|1{,}25)\}$
Die Einzelpreise der drei Artikel betragen 0,85 € (Cola), 0,60 € (Schokoriegel) bzw. 1,25 € (Eis).