DUDEN

LEARN ATTACK MATHEMATIK

TOPTHEMEN OBERSTUFE
DER SICHERE WEG ZUM ABITUR

- **„Der Gegenstand wird in einer Höhe von 2,20 m über dem Boden schräg nach oben geworfen“:** Der Abwurfpunkt liegt laut Skizze bei $x_0 = 0$. Der y-Wert ist 2,2 (Rechnung ohne Einheiten).
  $\Rightarrow$ Ein Punkt der Parabel ist: $P_1(0|2{,}2)$.
- **„Er erreicht seine größte Höhe in einer Entfernung von 8 m vom Abwurfpunkt“:** Die größte Höhe entspricht dem Hochpunkt der Parabel. Dort ist die 1. Ableitung gleich null
  $\Rightarrow$ $f'(8) = 0$.
- **„und trifft in einer Entfernung von insgesamt 19,50 m auf dem Boden auf“:**
  Für $x_1 = 19{,}5$ ist der Funktionswert 0 (der Ball trifft auf den Boden).
  $\Rightarrow$ Ein zweiter Punkt der Parabel ist: $P_2(19{,}5|0)$

Man hat also zwei Punkte und für einen x-Wert den Wert der 1. Ableitung. Die Ableitungen der quadratischen Funktion werden daher auch benötigt (die 2. Ableitung wird später ebenfalls gebraucht).

Ableitungen bilden (Material)

$f'(x) = 2ax + b$
$f''(x) = 2a$

WISSEN **Andere Funktionsklassen**

Auch bei anderen Funktionen, beispielsweise rationalen Funktionen, Exponentialfunktionen oder Wurzelfunktionen, kann man Parameter einführen und diese dann über Vorgaben an die Funktions- oder Ableitungswerte bestimmen. Eine allgemein anwendbare Methode existiert hierfür nicht.

AUFGABE 1 *Übersetze die gegebenen Bedingungen in Mathematik.*
Bestimme jeweils diejenige Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot e^x + b \cdot e^{-x}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt.
a) f hat im Punkt (0|1) die Steigung 3.
b) f hat im Punkt (0|2) eine waagerechte Tangente.

2 Gleichungen aufstellen

Für n Parameter n Gleichungen aus n Bedingungen (Material)

Gesucht sind drei Parameter, daher werden auch drei Gleichungen benötigt.

- **Bedingung 1:**
  Aus dem gegebenen Punkt $P_1(0|2{,}2)$ ergibt sich eine Gleichung, wenn man den x-Wert in den allgemeinen Funktionsterm einsetzt und diesen dann gleich dem y-Wert des Punktes setzt: $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2{,}2 \Leftrightarrow c = 2{,}2$
- **Bedingung 2:**
  Aus dem Wert der 1. Ableitung für $x = 8$ erhält man: $f'(8) = 2a \cdot 8 + b = 0 \Leftrightarrow 16a + b = 0$
- **Bedingung 3:**
  Aus dem gegebenen Punkt $P_2(19{,}5|0)$ ergibt sich eine Gleichung, wenn man den x-Wert in den allgemeinen Funktionsterm einsetzt und diesen dann gleich dem y-Wert des Punktes setzt: $f(19{,}5) = a \cdot 19{,}5^2 + b \cdot 19{,}5 + c = 0 \Leftrightarrow 380{,}25a + 19{,}5b + c = 0$

Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem, aus dem im nächsten Unterkapitel die Parameter berechnet werden:

(I) $c = 2{,}2$

(II) $16a + b = 0$

(III) $380{,}25a + 19{,}5b + c = 0$

3 Gleichungssystem lösen

Parameter bestimmen (Material)

Die Zahl der Gleichungen kann zunächst auf zwei reduziert werden, da mit $c = 2{,}2$ aus (I) bereits ein Parameter bekannt ist:

(II) $16a + b = 0$

(III) $380{,}25a + 19{,}5b + 2{,}2 = 0$

Auflösen von (II) nach b und Einsetzen in (III) liefert:

(II) $b = -16a$

(III) $380{,}25a + 19{,}5 \cdot (-16a) = 380{,}25a - 312a = 68{,}25a = -2{,}2 \Rightarrow a \approx -0{,}032$

Einsetzen von a in (II) liefert: $b \approx 0{,}52$.

Funktionsterm aufstellen (Material)

Mit den bestimmten Parametern a, b, c ergibt sich der Funktionsterm zu:

$f(x) = -0{,}032x^2 + 0{,}52x + 2{,}2$.

Funktionsterm prüfen (Material)

Alle nicht äquivalent übersetzten Bedingungen müssen im Anschluss noch geprüft werden. Eine Bedingung war, dass die Parabel bei $x = 8$ einen Hochpunkt hat, übersetzt wurde jedoch nur in: $f'(8) = 0$. Zu prüfen wäre jetzt also, ob hier wirklich ein Hochpunkt vorliegt. Dazu wird das Vorzeichen der zweiten Ableitung an der vermuteten Extremstelle untersucht:

$f''(x) = 2a = 2 \cdot (-0{,}032) = -0{,}064 < 0$

$\Rightarrow$ Die Funktion $f(x) = -0{,}032x^2 + 0{,}52x + 2{,}2$ hat an der Stelle $x = 8$ einen Hochpunkt.

AUFGABE 2 *Bestimme die reellen Parameter a und b so, dass die gebrochen rationale Funktion*

$r(x) = \frac{x^2 - a}{(x-b)^2};\ x \neq b$

an der Stelle $x_0 = 4$ ein lokales Extremum und an der Stelle $x_1 = 5$ einen Wendepunkt hat.

Extremwertaufgaben

Optimierung mit Nebenbedingungen

1 Aufgabe mathematisch formulieren

- Extremwertaufgaben
- Aufgabe verstehen
- Skizze anfertigen
- Größen und Bedingungen zusammenstellen

2 Zielfunktion bestimmen

- Nebenbedingungen
- Formel für die zu optimierende Größe aufstellen
- Nebenbedingung in Gleichung übersetzen
- Nebenbedingungen in zu optimierende Formel einsetzen

3 Extremstellen der Zielfunktion ermitteln

- Definitionsbereich festlegen
- Lokale Extrema ermitteln
- Globale Extrema
- Globale Extrema ermitteln

MATERIAL

Optimierung eines Volumens

Aus einem Stück Pappe (60 cm × 70 cm) soll eine offene Schachtel hergestellt werden, deren Länge und Breite gleich sind. Das Volumen der Schachtel soll maximal sein.

1

Aufgabe mathematisch formulieren

WISSEN **Extremwertaufgaben**

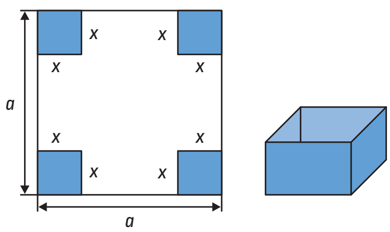
Die Lösung von Extremwertaufgaben – oft spricht man auch von Optimierungsaufgaben – ist ein wichtiges Anwendungsgebiet der Differenzialrechnung. Das Problem besteht darin, den optimalen Wert einer Größe zu ermitteln (beispielsweise den minimalen Blechverbrauch zur Herstellung einer Konservendose), wobei noch bestimmte Nebenbedingungen zu berücksichtigen sind (in diesem Beispiel die Tatsache, dass die Konservendose ein bestimmtes Volumen haben muss).

Aufgabe verstehen (Material)

Länge und Breite der Schachtel sollen gleich sein, das bedeutet, der Boden der Schachtel ist quadratisch. Daher kann von dem Stück Pappe nur ein quadratisches Stück mit der Seitenlänge 60 cm verwendet werden. Ausgangspunkt ist also ein Quadrat mit der Seitenlänge a = 60 (cm; Rechnung ohne Einheiten) als Schachtelboden. Das entstehende Schachtelvolumen V soll maximal werden.

Skizze anfertigen (Material)

Anhand einer Skizze macht man sich klar, wie das „Schnittmuster" für eine solche Schachtel aussieht – aus den Ecken müssen jeweils kleinere Quadrate entfernt werden:



Größen und Bedingungen zusammenstellen (Material)

Das Volumen der Schachtel ist also davon abhängig, wie groß die kleinen Quadrate sind, und damit von der Seitenlänge x dieser Quadrate, denn die maximale Seitenlänge des Materialquadrates a ist durch das vorhandene Material bereits vorgegeben.

- **Gesucht:** Länge x eines zu entfernenden Quadrats in cm, für die das Volumen V maximal wird
- **Bedingung:** Seitenlänge des Materialquadrates: a = 60 cm

2 Zielfunktion bestimmen

WISSEN **Nebenbedingungen**

Die Aufgabenstellung ist, die Extrema einer Funktion f(x,y) von zwei Variablen x und y zu bestimmen, wobei die Variablen zusätzlich noch durch eine Gleichung verbunden sind. Man spricht dann von einer Nebenbedingung.
Man löst solche Aufgaben, indem man die Nebenbedingung (falls notwendig) nach einer der beiden Variablen auflöst und in die Funktion f einsetzt. Das ergibt eine Funktion mit nur einer Variablen, die man mit den üblichen Mitteln untersuchen kann.

Formel für die zu optimierende Größe aufstellen (Material)

Die zu optimierende Größe ist das Schachtelvolumen. Bei einer quaderförmigen Schachtel berechnet sich das Volumen aus „Grundfläche mal Höhe". Die Höhe ergibt sich aus der Seitenlänge x der zu entfernenden Quadrate, die quadratische Grundfläche hat die zunächst unbekannte Länge y:
$V(x) = y^2 \cdot x$.
Diese Gleichung enthält zwei Variablen y und x und ist daher nicht eindeutig lösbar. Über die Nebenbedingung(en) soll daher die Anzahl Variablen reduziert werden.

Nebenbedingung in Gleichung übersetzen (Material)

Von der Länge a des Materialquadrates wird durch das Entfernen der Quadrate in den Ecken zweimal die Länge x abgezogen. Damit ergibt sich für die Länge der Schachtelgrundfläche:
$y = a - 2x$

Nebenbedingungen in zu optimierende Formel einsetzen (Material)

Die Zielfunktion, also die Funktionsgleichung für das zu maximierende Volumen, erhält man, indem man die Gleichung für y, die sich aus der Nebenbedingung ergab, in die Formel für V(x) einsetzt. Dadurch wird die Anzahl Variablen um eine reduziert:
$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x$.
Ausmultiplizieren und zusammenfassen führt auf die Zielfunktion:
$V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$.

3 Extremstellen der Zielfunktion ermitteln

Definitionsbereich festlegen (Material)

Zur Ermittlung der globalen Extrema (siehe S. 24) muss man den Definitionsbereich kennen. Der Definitionsbereich D_f von V(x) ist begrenzt durch die vorhandene Materialmenge: Die Länge der kleinen Quadrate x ist nach oben begrenzt durch die halbe Länge des Materialquadrates (= 30 cm), nach unten durch 0 cm (x = 0 cm ist gleichbedeutend damit, dass überhaupt kein Quadrat entfernt wird; für x = 30 cm wird das gesamte Material entfernt). Um überhaupt eine Schachtel falten zu können, darf x jedoch nicht gleich 0 oder gleich 30 werden; 0 und 30 sind also nicht im Definitionsbereich enthalten:
$D_f =]0; 30[$.