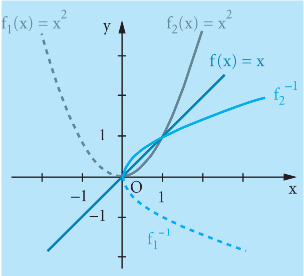
dann existieren deren Umkehrungen. Aus $y = x^2$ folgt $|x| = \sqrt{y}$, woraus man $-x = \sqrt{y}$ bzw. $x = \sqrt{y}$ erhält. Vertauschen von x und y liefert die Gleichungen der Umkehrfunktionen $f_1^{-1}\colon\ y = -\sqrt{x}$, $f_2^{-1}\colon\ y = \sqrt{x}$.



1

Nullstellen

Definition

Eine Zahl $x_0 \in D_f$ heißt **Nullstelle von f**, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

In der grafischen Darstellung ist eine Nullstelle einer Funktion die Abszisse eines Schnittpunkts des Funktionsgraphen mit der x-Achse. Eine Funktion kann genau eine, mehrere oder keine Nullstelle bzw. Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen.

Abschnittsweise definierte Funktionen

Definition

Abschnittsweise definierte Funktionen werden in den Abschnitten ihres Definitionsbereiches durch unterschiedliche Zuordnungsvorschriften bzw. Funktionsterme definiert.

Beispiel: Die Zuordnung „Briefgewicht (m in g) → Beförderungsgebühr (p in Euro)“ stellt eine Funktion p = f(m) dar:

$$p(m) = \begin{cases} 0{,}55 \text{ für } & 0 < m \leq 20 \\ 0{,}90 \text{ für } & 20 < m \leq 50 \\ 1{,}45 \text{ für } & 50 < m \leq 500 \\ 2{,}20 \text{ für } & 500 < m \leq 1\,000 \end{cases}$$

1.3 Verknüpfen und Verketten

Verknüpfen

Aus bekannten Funktionen können durch **Verknüpfen** der entsprechenden Funktionsgleichungen (kurz: der Funktionen) mithilfe der Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division neue Funktionen gebildet werden.

Summe, Differenz, Produkt, Quotient

Die Funktionen f mit $y = f(x)$ und g mit $y = g(x)$ auf den Definitionsmengen D_f und D_g bilden folgende Verknüpfungen:

Summe	$s = f + g$ mit $s(x) = f(x) + g(x)$, $D_s = D_f \cap D_g$
Differenz	$d = f - g$ mit $d(x) = f(x) - g(x)$, $D_d = D_f \cap D_g$
Produkt	$p = f \cdot g$ mit $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $D_p = D_f \cap D_g$
Quotient	$q = \frac{f}{g}$ mit $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_q = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$

Der Definitionsbereich einer durch Verknüpfung entstandenen Funktion ist in Abhängigkeit von den Definitionsbereichen der Ausgangsfunktion und der Verknüpfungsart zu bestimmen.

Beispiel: Für die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - 1$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$ wird das Produkt $f \cdot g$ beschrieben durch $p(x) = x^2 \cdot (x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Für den Quotienten $\frac{f}{g}$ erhält man $q(x) = \frac{x^2}{x - 1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

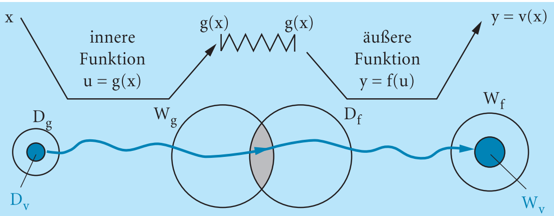
Verketten

Eine weitere Möglichkeit, aus gegebenen Funktionen neue Funktionen zu bilden, stellt das **Nacheinanderausführen** bzw. **Verketten** zweier Zuordnungsvorschriften dar.

Verkettung, äußere und innere Funktion

Die Funktion v mit $v(x) = f(g(x))$ heißt **Verkettung** von f und g. Man schreibt $v = f \circ g$ (gesprochen: *f* nach *g*). Die Funktion f nennt man **äußere Funktion**, die Funktion g **innere Funktion** der verketteten Funktion v. Die Verkettung v ist definiert für alle x, für welche die Funktionswerte von g (also $g(x)$) zum Definitionsbereich von f gehören.

Eine Verkettung der äußeren Funktion f mit der inneren Funktion g zur Funktion $v = f \circ g$ bedeutet demnach, dass man Funktionswerte $g(x)$ der inneren Funktion g zu Argumenten der äußeren Funktion f macht. Eine Verkettung ist nur dann möglich, wenn die Schnittmenge aus dem Definitionsbereich von f und dem Wertebereich von g nicht leer ist.



$$D_v = \{x \mid x \in D_g \text{ und } g(x) \in D_f\}$$

Beispiel: Betrachtet werden die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = 2x$. Um die Verknüpfung $f \circ g$ zu erhalten, wendet man in einem ersten Schritt auf einen Wert x aus dem Definitionsbereich von g die Zuordnungsvorschrift g „Verdopple!“ an und erhält so den Funktionswert $g(x) = 2x$.

In einem zweiten Schritt wird auf den Wert $g(x)$ die Zuordnungsvorschrift f „Sinuswert bilden!“ angewendet. Man erhält: $f(2x) = \sin 2x$.

Durch die Verknüpfung $f \circ g$ ist somit die neue Funktion v mit $v(x) = \sin 2x$ entstanden.

Werden reelle Zahlen additiv oder multiplikativ mit Funktionstermen $f(x)$ oder mit der Funktionsvariablen x verknüpft, so erhält man die Gleichungen neuer Funktionen.
Diese Gleichungen beschreiben jeweils eine Menge von Funktionen, eine **Funktionenschar**. Die Gleichungen der einzelnen Funktionen (der **Scharelemente**) hängen von der Wahl der **Scharparameter** c, d, k bzw. m ab. Das Bild einer Funktionenschar ist eine **Graphenschar**.

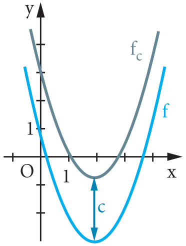
Gleichungen der Funktionsscharen

Aus einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ entstehen so z. B. die Gleichungen $(c, d, k, m \in \mathbb{R})$

1. $y = f_c(x) = f(x) + c$,
2. $y = f_d(x) = f(x + d)$,
3. $y = f_k(x) = k \cdot f(x)$,
4. $y = f_m(x) = f(m \cdot x)$.

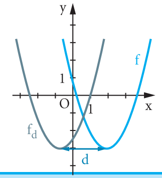
Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_c(x) = f(x) + c$

1. Die Graphen der Schar f_c erhält man durch **Verschiebung** des Graphen von f **in Richtung der y-Achse** um $|c|$ Einheiten, und zwar für $c > 0$ in Richtung des positiven und für $c < 0$ in Richtung des negativen Teils der y-Achse.



Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_d(x) = f(x + d)$

2 Die Graphen der Schar f_d erhält man durch **Verschiebung** des Graphen von f **in Richtung der x-Achse** um $|d|$ Einheiten, und zwar für $d > 0$ in Richtung des negativen und für $d < 0$ in Richtung des positiven Teils der x-Achse.



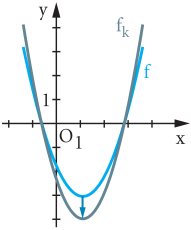
Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_k(x) = k \cdot f(x)$

3 Die Graphen der Schar f_k erhält man durch **Streckung** oder **Stauchung** des Graphen von f senkrecht zur x-Achse mit dem Faktor $|k|$.

$k > 1$: Streckung, $0 < k < 1$: Stauchung

Für $k = -1$ geht der Graph von f_k aus dem Graphen von f durch **Spiegelung** an der x-Achse hervor.

$-1 < k < 0$ oder $k < -1$: Spiegelung an der x-Achse und anschließend Stauchung bzw. Streckung senkrecht zur x-Achse.



Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_m(x) = f(m \cdot x)$

4 Die Graphen der Schar f_m erhält man durch **Streckung** oder **Stauchung** des Graphen von f senkrecht zur y-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{|m|}$

$m > 1$: Streckung

$0 < m < 1$: Stauchung

Für $m = -1$ geht der Graph von f_m aus dem Graphen von f durch **Spiegelung** an der y-Achse hervor.

$-1 < m < 0$ oder $m < -1$: Spiegelung an der y-Achse und anschließend Streckung bzw. Stauchung senkrecht zur y-Achse.