Sharon Bertsch McGrayne

Die Theorie, die nicht sterben wollte

Wie der englische Pastor Thomas Bayes eine Regel entdeckte, die nach 150 Jahren voller Kontroversen heute aus Wissenschaft, Technik und Gesellschaft nicht mehr wegzudenken ist

SACHBUCH

Springer Spektrum

In jenen Jahren tat sich Bayes mit einer weiteren Gruppe von Amateurmathematikern zusammen, die wissenschaftlich gesehen auf der Höhe der Zeit waren. Er war in eine kleine Gemeinde in Tunbridge Wells gewechselt, einem eleganten Kurort mit einer eisenhaltigen Heilquelle. Als unabhängiger, wohlhabender Junggeselle – seine Familie hatte mit der Produktion von Sheffielder Stahlbesteck ein Vermögen gemacht – mietete er sich bei einer nonkonformistischen Familie ein. Seine kirchlichen Verpflichtungen waren überschaubar: eine Messe an jedem Sonntag. Und die Gepflogenheiten in dem Kurort erlaubten es, ganz im Gegensatz zu anderen Orten, dass sich Nonkonformisten, Juden, Römisch-Katholische und sogar Ausländer unter die englische Gesellschaft mischten, zu der auch einige wohlhabende Earls gehörten.

Ein regelmäßiger Gast in Tunbridge Wells war Philip, der zweite Earl of Stanhope; er hatte schon als Kind eine Leidenschaft für Mathematik entwickelt, die sein Erzieher aber als nicht standesgemäß ablehnte. Als Stanhope 20 war und tun konnte, was er wollte, konnte ihn niemand mehr von Euklid abbringen. Elizabeth Montagu zufolge, der „Königin der Blaustrümpfe“[3] zeichnete Stanhope „ständig mathematische Skizzen in sein Notizbuch, sodass ihn die eine Hälfte der Leute für einen Hexenmeister hielt, die andere für einen Verrückten“.[4] Stanhope veröffentlichte zeitlebens keine eigenen Texte – sei es wegen seiner aristokratischen Stellung, sei es, weil er so spät mit der Mathematik angefangen hatte. Aber er wurde zu Englands tonangebendem Schutzherrn der Mathematiker.

Der Earl und der tatkräftige Sekretär der Royal Society, John Canton, hatten ein informelles Netzwerk von Gelehrten geknüpft, die untereinander ihre Arbeiten zur kritischen Lektüre austauschten. Irgendwann stieß auch Bayes zu diesem Netzwerk. Eines Tages schickte Stanhope die Kopie eines Entwurfs von einem Mathematiker namens Patrick Murdoch an Bayes. Jener war mit einigen Punkten in dem Text nicht einverstanden und schickte seine Kommentare an Stanhope, der sie an Murdoch weitergab. Der antwortete wiederum über Stanhope, und so ging es hin und her. Die Beziehung des jungen Earl mit dem älteren Geistlichen Bayes schien sich zu einer Freundschaft entwickelt zu haben, denn Stanhope besuchte Bayes wenigstens einmal in Tunbridge Wells, rettete zwei Bündel mathematischer Aufzeichnungen von Bayes für seine Bibliothek und abonnierte sogar seine Reihe von Predigten.

1748 explodierte in England eine weitere brisante Mixtur aus Religion und Mathematik, als der schottische Philosoph David Hume seine *Enquiry Concerning Human Understanding* (*Untersuchung in Betreff des menschlichen Verstandes*) veröffentlichte, in der er einige der grundlegenden Schilderungen der christlichen Überlieferung angriff. Hume glaubte, man könne sich in nichts absolut sicher sein, ganz unabhängig davon, ob es auf traditionellen Glauben, Zeugenaussagen, Gewohnheiten oder Ursache und Wirkung betrifft. Mit anderen Worten: Wir können uns allein auf unsere Erfahrung verlassen.

Da nun aber Gott als die „erste Ursache" von allem galt, war Humes Skeptizismus bezüglich Ursache und Wirkung besonders verstörend. Hume argumentierte, dass zwar bestimmte Objekte ein für alle Mal mit bestimmten anderen zusammengehören. Wenn aber Regenschirme zum Regen gehören, bedeutet das nicht, dass sie den Regen verursachen. Die Tatsache, dass die Sonne schon Tausende Male aufgegangen ist, bietet keine Garantie dafür, dass sie es auch morgen tun wird. Vor allem aber beweist die Existenz der Schöpfung nicht die Existenz eines Schöpfers oder einer allerersten Ursache. Da wir nur selten sicher sein können, dass eine bestimmte Ursache eine ganz bestimmte Wirkung hat, müssen wir schon damit zufrieden sein, *wahrscheinliche* Ursachen und Wirkungen zu finden. Mit seiner Kritik des Konzepts von Ursache und Wirkung unterminierte Hume den Kern des christlichen Glaubens.

Humes Essay hatte nichts mit Mathematik zu tun, aber er hatte tief greifende wissenschaftliche Folgen. Viele Mathematiker und Naturwissenschaftler vertraten leidenschaftlich die Ansicht, dass die Naturgesetze wirklich die Existenz Gottes bewiesen, der ihre „erste Ursache" war. Wie der berühmte Mathematiker Abraham de Moivre in seiner einflussreichen *Doctrine of Chances* schrieb,[5] würde die Berechnung von Naturereignissen schließlich den dem Universum und seiner erlesenen „Weisheit und Ordnung" zugrunde liegenden Plan enthüllen.

Die Zweifel Humes am Zusammenhang von Ursache und Wirkung lagen also in der Luft, als Bayes Wege suchte, das Problem mathematisch anzugehen. Heute wäre dafür die Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine Mathematik der Unbestimmtheit das selbstverständliche Instrument, aber Anfang des 18. Jahrhunderts war der Begriff „Wahrscheinlichkeit" noch kaum bekannt. Nur beim Glücksspiel machte man Gebrauch von ihm – für so grundlegende Dinge wie die Chance, beim Poker vier Asse auf die Hand zu bekommen. De Moivre, der einige Jahre in französischen Gefängnissen verbracht hatte, weil er Protestant war, hatte dieses Problem bereits gelöst, indem er seinen Blick von den Ursachen auf die Wirkungen lenkte. Niemand wusste aber damals, wie man umgekehrt von den Wirkungen zurück auf die Ursachen schließen und damit die „inverse" Frage beantworten konnte: Was ist, wenn ein Pokerspieler in drei aufeinanderfolgenden Spielen vier Asse bekommt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ursache dafür gezinkte Karten sind?

Wir wissen nicht genau, was Bayes' Interesse an diesem Problem der inversen Wahrscheinlichkeit auslöste. Er hatte de Moivres Buch gelesen, und der Earl of Stanhope war an den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung für das Glücksspiel interessiert. Es könnte aber auch sein, dass es die vielen offenen Fragen waren, die sich aus Newtons Gravitationstheorie ergaben. Newton, der 20 Jahre zuvor gestorben war, hatte immer wieder betont, wie wichtig Beobachtungen waren und die Gravitationstheorie entwickelt, um die Beobachtungen zu erklären. Dann konnte er mit seiner Theorie die Resultate neuer Beobachtungen vorhersagen. Aber Newton konnte die *Ursache* der Schwerkraft nicht erklären und hatte sich auch nicht damit auseinandergesetzt, ob seine Theorie richtig war oder nicht. Letztlich könnte Bayes' Interesse auch durch Humes philosophischen Essay geweckt worden sein. Auf jeden Fall lagen die Probleme von Ursache, Wirkung und Ungewissheit in der Luft, und Thomas Bayes machte sich daran, sie quantitativ zu behandeln.

Bayes arbeitete zunächst die wesentliche Frage des Problems der inversen Wahrscheinlichkeit heraus und setzte sich als Ziel, die ungefähre Wahrscheinlichkeit für das zukünftige Auftreten eines Ereignisses herauszufinden, von dem er nur wusste, wie oft es sich in der Vergangenheit ereignet hatte oder auch nicht. Um dieses Problem zu quantifizieren, brauchte er eine Zahl, und irgendwann zwischen 1746 und 1749 stieß er auf eine geniale Lösung: Er erfand einfach einen Anfangswert, den er „guess", also „Vermutung" nannte. Dieser Anfangswert konnte und sollte dann später verbessert und aktualisiert werden, wenn mehr Informationen zur Verfügung standen.

Als Nächstes entwickelte Bayes ein Gedankenexperiment, die 18tes-Jahrhundert-Version einer Computersimulation. Er reduzierte sein Problem auf das Wesentliche und stellte sich einen quadratischen Tisch vor, der so glatt und eben war, dass eine Kugel, die man darauf warf, an jeder Stelle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit landen würde. Man könnte seine Konstruktion „Billardtisch" nennen, aber als nonkonformistischer Geistlicher missbilligte Bayes vermutlich solche Spiele. Außerdem kamen in seinem Experiment keine Kugeln vor, die miteinander oder mit den Banden zusammenstoßen. Er forderte nur, dass eine Kugel, die zufällig über den Tisch rollte, überall stehen bleiben konnte.

Wir stellen uns Bayes nun vor, wie er mit dem Rücken zu dem imaginären Tisch saß, sodass er nichts auf ihm sehen konnte. Auf einem Blatt Papier hatte er ein Quadrat gezeichnet, das die Tischplatte darstellte. Ein imaginärer Helfer warf dann eine imaginäre weiße Kugel auf den Tisch. Bayes wusste nicht, wo die Kugel landete.

Wir stellen uns weiter vor, wie er seinen imaginären Helfer bat, eine zweite, diesmal rote Kugel einzuwerfen und ihm zu sagen, ob sie rechts oder links von der weißen gelandet war. Lag die rote Kugel links von der weißen Markierungskugel, schloss Bayes, dass die erste Kugel mit größerer Wahrscheinlichkeit auf der rechten Seite des Tisches gelandet war. Dann warf der Helfer wieder eine rote Kugel. Blieb sie rechts von der weißen Markierungskugel liegen, war Bayes klar, dass die weiße Kugel nicht am äußersten rechten Rand der Tischplatte liegen konnte.

Der Helfer warf nun Kugel um Kugel. Spieler und Mathematiker wussten schon damals, dass bei Münzwürfen ihre Schlussfolgerungen umso verlässlicher wurden, je öfter sie eine Münze warfen. Bayes entdeckte bei seinem Gedankenexperiment, dass mit jeder weiteren roten Kugel die Information, die er erhielt, die imaginäre weiße Markierungskugel ein wenig hin- und herrückte, wobei ihr Spielraum immer kleiner wurde.

Im extremen Fall mit sämtlichen roten Kugeln rechts von der weißen, hätte Bayes geschlossen, dass die Markierungskugel wahrscheinlich am äußersten linken Rand der Tischplatte lag. Bayes' geniale Idee war, dass er mit der Zahl der Würfe den Spielraum der weißen Markierungskugel trotz dieser dürftigen Informationen nach Belieben einengen konnte, ohne allerdings je eine *exakte* Antwort zu erhalten. Bayes war also nicht in der Lage zu sagen, wo genau die Kugel lag, aber immer sicherer, dass sie in einem bestimmten Bereich war. Bayes' einfaches und reduziertes Verfahren ging also von realen Beobachtungen aus, und schloss daraus auf den Ursprung oder die Ursache zurück. Aus der Kenntnis der Gegenwart (die roten Kugeln relativ zur weißen Markierungskugel) schloss Bayes auf die Vergangenheit (die Position der weißen Markierungskugel). Außerdem konnte er angeben, wie zuverlässig seine Aussagen waren.

Vom Konzept her ist das Bayes'sche Verfahren sehr einfach: Wir revidieren unsere Ansichten aufgrund objektiver Informationen. Aus der anfänglichen Vermutung, wo die Markierungskugel liegen könnte, wird mit neuen objektiven Daten (ob die zuletzt geworfene rote Kugel links oder rechts der Markierungskugel liegt) eine neue und sicherere Vermutung. Für diese drei Schritte des Verfahrens wurden schließlich Begriffe geprägt: „Prior" für die Wahrscheinlichkeit der ursprünglichen Vermutung, „Likelihood" für die Wahrscheinlichkeit anderer Hypothesen mit neuen objektiven Daten und „Posterior" für die Wahrscheinlichkeit der neuen, revidierten Vermutung. Jedes Mal, wenn man das System neu durchrechnet, wird aus dem alten Posterior der Prior der neuen Rechnung. Das System entwickelt sich ständig fort: Jede neue Information bringt uns der Gewissheit näher. Kurz gesagt:

> „Prior" mal „Likelihood" ist proportional zum „Posterior".

In der Fachsprache der Statistiker ist die Likelihood die Wahrscheinlichkeit konkurrierender Hypothesen für die beobachteten Daten. Andrew Dale, der südafrikanische Statistikhistoriker, vereinfachte das Ganze noch weiter und stellte fest: „Grob gesprochen ist die Likelihood das, was vom Bayes-Theorem bleibt, wenn der Prior aus der Diskussion geflogen ist."[6]

Was den speziellen Fall von Kugeln betrifft, die per Zufall auf eine Tischplatte geworfen werden, gibt es keinen Zweifel am Bayes-Theorem. Bayes wollte aber *alle* Situationen abdecken, bei denen Unbestimmtheit eine Rolle spielt, selbst Situationen, von denen wir überhaupt keine Vorgeschichte kennen, oder in seinen Worten, „von dessen Wahrscheinlichkeit vor irgendwelchen diesbezüglichen Versuchen oder Beobachtungen schlechterdings nichts bekannt ist“.[7] Diese Erweiterung seines Tischplatten-Experiments auf jede Art von Unbestimmtheit war Anlass für 150 Jahre voller Missverständnisse und harter Angriffe. Diese richteten sich insbesondere gegen zwei Dinge: Bayes’ subjektive erste Annahmen und die von ihm vorgeschlagene Vereinfachung, alle Möglichkeiten für die erste Annahme als gleichwertig anzusehen.

Bayes stellte eine Vermutung für seine anfängliche Annahme (die Position der weißen Markierungskugel, sein späterer Prior) auf. Wie er selbst sagte, versuchte er „einen Schluss auf die ungefähre Größe seiner Wahrscheinlichkeit (zu) ziehen und … nach den gewöhnlichen Methoden … die Wahrscheinlichkeit, dass die Vermutung richtig ist, (zu) ermitteln“.[8] Die späteren Kritiker fanden die Idee zutiefst beunruhigend, dass die objektive und strenge Mathematik mit bloßen Vermutungen oder einem subjektiven Glauben kombiniert werden sollte.

Schlimmer noch: Bayes machte für den Fall, dass er nichts Genaueres über die Position der Kugeln wusste, die Annahme, dass sie überall auf dem Tisch mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu liegen kommen konnten. Derartige gleiche Wahrscheinlichkeiten anzunehmen, war ein pragmatischer Ansatz für den Umgang mit ungewissen Umständen. Diese Praxis hatte ihre Wurzel im traditionellen Christentum und in der Verdammung des Zinswuchers durch die römisch-katholische Kirche. Auch bei unsicheren Dingen, wie es Versicherungspolicen für Seefahrer und Renten waren, mussten alle Kunden den gleichen Beitrag zahlen, und auch der Gewinn wurde gleichmäßig verteilt. Selbst prominente Mathematiker behaupteten, alle Ausgänge bei Spielen hätten die gleiche Wahrscheinlichkeit, weil sie von der bemerkenswert unrealistischen Annahme ausgingen, alle Tennisspieler oder Kampfhähne seien gleich geschickt.

Mit der Zeit fand man für diese Praxis, gleiche Wahrscheinlichkeiten anzunehmen, eine Reihe von Formulierungen wie „gleiche Prioren“, „gleiche Aprioris“, „gleiche Wahrscheinlichkeiten“, „gleichförmige Wahrscheinlichkeitsverteilung“ oder das „Gesetz vom unzureichenden Grund“, das besagt, dass die Annahme *gleicher* Wahrscheinlichkeiten genügt, wenn man nicht genug Daten hat, um *bestimmte* Wahrscheinlichkeiten anzugeben. Trotz dieser altehrwürdigen Geschichte waren diese „gleichen Prioren“ der Blitzableiter, in den der Vorwurf einschlug, Bayes würde das Unwissen quantifizieren.

Heute versuchen einige Historiker Bayes zu entlasten, indem sie sagen, er habe gleiche Wahrscheinlichkeiten in erster Linie für seine Daten (also die aufeinanderfolgenden Würfe der roten Kugeln) angenommen und nicht für