essentials

Guido Walz

Gleichungen und Ungleichungen

Klartext für Nichtmathematiker

Springer Spektrum

heißt das nichts Anderes, als das man diese Formal zur Lösung jeder quadratischen Gleichung nutzen kann.

Regel
Eine quadratische Gleichung in Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

hat entweder gar keine, eine oder zwei verschiedene Lösungen.

Um herauszufinden, welche dieser Situationen vorliegt, und die Lösungen ggf. zu berechnen, bestimmt man zunächst die Zahl

$$d = \frac{p^2}{4} - q.$$

- Ist d negativ, so hat die quadratische Gleichung keine Lösung.
- Ist d gleich null, so hat die quadratische Gleichung genau eine Lösung, nämlich
$$x_1 = -\frac{p}{2}.$$
- Ist d positiv, so hat die quadratische Gleichung zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2, die man mithilfe der p-q-**Formel**
$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{d} \text{ und } x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{d}$$
berechnen kann. Meist fasst man das in der Kurzschreibweise
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{d} \tag{1.18}$$
zusammen.

Ja, ich *weiß*, dass das Ganze der Mitternachtsformel sehr ähnlich ist, und ich gebe auch zu, dass ich hier mit copy-and-paste gearbeitet habe, man muss ja vorankommen. Aber beachten Sie: Die p-q-Formel will ich Ihnen als Regel ans Herz legen, denn die sollten Sie meiner Meinung und Erfahrung nach benutzen; die Mitternachtsformel dagegen habe ich als Besserwisserinfo. formuliert.

Plauderei

In Malerei, Musik, Architektur und vielen anderen Bereichen spielt der **Goldene Schnitt** eine wichtige Rolle. In der Sprache der Geometrie kann man ihn wie folgt beschreiben: Ein Rechteck ist nach dem Goldenen Schnitt konstruiert, wenn das Verhältnis der längeren Seite zur kürzeren dasselbe ist wie das der Summe der beiden Seitenlängen zur längeren.
Noch irgendwelche Fragen? Vermutlich.

Sicherlich hilft ein Blick auf Abb. 1.1. Hier habe ich ein Rechteck gezeichnet, die längere Seite mit x und die kürzere mit y benannt. Die obige Forderung bedeutet nun in Formeln:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}. \tag{1.19}$$

Da es nur auf das Längenverhältnis der beiden Seiten ankommt, darf ich eine davon normieren und tue das, indem ich die Länge der kürzeren Seite mit 1 bezeichne, also $y = 1$ setze. Das macht aus (1.19) die schon sehr viel freundlicher aussehende Gleichung

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}.$$

Multipliziert man hier mit x durch und lässt den ohnehin unnötigen Nenner 1 weg, ergibt sich die äquivalente Gleichung

$$x^2 = x + 1,$$

und bringt man nun noch alles auf die linke Seite, erhält man die quadratische Gleichung in Normalform

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{1.20}$$

Der Wert d aus der p-q-Formel ist hier gleich

$$d = \frac{1}{4} - (-1) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4},$$

also positiv. Somit gibt es zwei verschieden Lösungen der quadratischen Gl. 1.20, nämlich

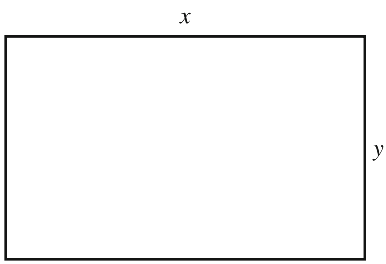
$$x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1,618 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -0,618.$$

Da negative Seitenlängen bei Rechtecken eher ungewöhnlich sind, erhält man als einzig sinnvolle Lösung des Problems $x_1 = 1,618...$.

Falls Sie vergessen haben sollten, welches Problem wir hier eigentlich gelöst haben (was ich gut verstehen könnte), hier noch einmal in Kurzfassung: Die Frage war, in welchem Verhältnis die beiden Seiten eines nach dem Goldenen Schnitt konstruiertem Rechtecks stehen müssen; und die Antwort lautet: Die längere Seite muss etwa 1,618-mal so lang sein wie die kürzere.

Übrigens ist das Rechteck in Abb. 1.1 tatsächlich nach diesem Prinzip gezeichnet. Derartige Figuren gelten als besonders schön. (Nein, darüber will ich jetzt nicht streiten.) Beispielsweise ist das Parthenon auf der Akropolis in Athen nach dem Goldenen Schnitt gebaut – wobei man nicht weiß, ob die Erbauer dieses Konstruktionsprinzip mit Absicht angewendet haben oder ob sie eher intuitiv einen „schönen" Grundriss wählten.

Abb. 1.1 Ein Rechteck



Nun aber genug der Plauderei, es folgen ein paar Beispiele zur p-q-Formel, denn um mathematische Inhalte zu erlernen, gibt es nichts Besseres als üben, üben und im Zweifelsfall nochmals üben.

Beispiel 1.9

a. Zu lösen ist die quadratische Gleichung

$$x^2 + x - 2.$$

Hier ist also $p = 1$ und $q = -2$. Somit ist

$$d = \frac{1}{4} - (-2) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4},$$

und da $\frac{9}{4}$ positiv ist, ist mit zwei verschiedenen Lösungen der quadratischen Gleichung zu rechnen. Diese lauten

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2.$$

b. Die zweite Gleichung, die wir uns anschauen wollen, ist

$$x^2 - 3x = 0. \tag{1.21}$$

Möglicherweise erinnern Sie sich noch an Beispiel 1.6 d und sehen daher, dass man auf der linken Seite x ausklammern kann und so die Gleichung in die Form

$$x(x-3) = 0$$

bringt. Hieran wiederum kann man direkt ablesen, dass die Gleichung die beiden Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 0$ hat, denn dafür wird auf der linken Seite jeweils einer der Faktoren null.

Aber genau das will ich jetzt erst mal nicht wissen (ältere Mathematiker können ganz schön bockig sein), sondern ohne weiteres Nachdenken die p-q-Formel auf (1.21) werfen. Das ist nicht ganz so sinnlos, wie es vielleicht scheint: In einer Stresssituation, wie beispielsweise einer Prüfung, kann es durchaus sein, dass Sie die gerade gezeigte Zerlegungsmöglichkeit eben *nicht* sehen, und dann hilft es, wenn man sich an etwas Sicherem wie der p-q-Formel festhalten kann.

Hier ist nun also $p = -3$ und $q = 0$, und somit

$$d = \frac{(-3)^2}{4} - 0 = \frac{9}{4} > 0.$$

Die somit zu erwartenden beiden Lösungen der Gleichung lauten

$$x_1 = -\frac{-3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \text{ und } x_2 = -\frac{-3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0,$$

in voller Übereinstimmung mit dem eingangs erhaltenen Resultat.

c. Nun geht es um die quadratische Gleichung

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \tag{1.22}$$

Ich denke, ich kann es mir inzwischen sparen, p und q noch mal explizit zu benennen, das ~~wird mir langsam lästig~~ haben Sie inzwischen selbst drauf. Für d erhalte ich den Wert

$$d = \frac{(-6)^2}{4} - 9 = \frac{36}{4} - 9 = 0.$$

Gl. 1.22 hat also gemäß der p-q-Formel nur eine Lösung, nämlich

$$x_1 = -\frac{-6}{2} = 3.$$

Besserwisserinfo
Vielleicht kennen Sie ja die binomische Formel, auch wenn ich die in diesem Text bisher mit keinem Wort erwähnt habe. Wenn dem so ist, können Sie sie einmal auf die linke Seite der Gl. 1.22 anwenden; Sie erhalten dadurch den Ausdruck $(x - 3)^2$, die Gleichung ist also ~~äquivalent zu~~ gleichbedeutend mit

$$(x - 3)^2 = 0.$$

In dieser Form sieht man der Gleichung aber mit bloßem Auge an, dass sie die einzige Lösung $x = 3$ hat.

Wir haben also zwei verschiedene Möglichkeiten gefunden, (1.22) zu lösen; es gibt Schlimmeres.

d. Kein Mensch hat behauptet, dass die in einer Gleichung auftretenden Zahlen immer ganze Zahlen sein müssen. Hierzu die folgenden beiden Beispiele. Zu lösen ist die quadratische Gleichung

$$x^2 - 3x + \frac{11}{4} = 0. \tag{1.23}$$

Hier ist

$$d = \frac{9}{4} - \frac{11}{4} = -\frac{1}{2},$$