LEHRBUCH

Klaus Fritzsche

Grundkurs Funktionentheorie

Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen

2. Auflage

Springer Spektrum

Grundkurs Funktionentheorie

Klaus Fritzsche

Grundkurs Funktionentheorie

Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen

2. Auflage

Springer Spektrum

Klaus Fritzsche
Bergische Universität Wuppertal
Wuppertal, Deutschland

ISBN 978-3-662-60381-9 ISBN 978-3-662-60382-6 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60382-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Aus dem Vorwort zur 1. Auflage:

Die Funktionentheorie besticht durch Eleganz und Kraft, sie zeigt sich als eine in sich abgeschlossene Theorie, die dennoch zahlreiche andere Gebiete der Mathematik befruchtet und sich durch ihre Anwendbarkeit einen wichtigen Platz in den Natur- und Ingenieurwissenschaften erobert hat. Für den Mathematiker steht die Funktionentheorie an der Schnittstelle zwischen den drei großen Gebieten Algebra, Geometrie und Analysis und liefert unverzichtbare Beiträge zu allen drei Disziplinen. Anwender, die neben einer Reihe anderer wichtiger Methoden immer wieder Integrale und Integraltransformationen mit all ihren Facetten benutzen müssen, schätzen die Funktionentheorie, die jenseits der klassischen Methoden zur Bestimmung von Stammfunktionen ganz neue, starke und dennoch leicht zu handhabende Werkzeuge bereitstellt.

Studienanfängern stellt sich die Funktionentheorie als eine erste Begegnung mit neuen, unbekannten Welten dar, die über den Schulhorizont weit hinausgehen. Deshalb wird die Funktionentheorie am Anfang als besonders schwer empfunden, obwohl sie das überhaupt nicht ist. Hier muss man sich wirklich auf Neues einlassen und in Kauf nehmen, dass man mit Gegenständen zu arbeiten hat, die sich der Anschauung entziehen. Dies ist zugleich die Chance, in der Welt der Mathematik „erwachsen“ zu werden. Hat man die Funktionentheorie erfolgreich studiert und damit auch immer wieder Wechsel der Betrachtungsrichtung vollzogen, so hat man die mathematischen Denk- und Arbeitsweisen begriffen und ist bereit, sich auch noch weit anspruchsvolleren Zielen zuzuwenden.

Die ersten drei Kapitel dieses Buches umfassen den eigentlichen Kern der Funktionentheorie, von der Einführung komplexer Zahlen und Funktionen und deren Differenzierbarkeit über die faszinierend einfache und doch verblüffend mächtige Theorie der komplexen Kurvenintegrale mit allen Wundern der Cauchy-Theorie bis hin zum Höhepunkt, dem Residuensatz, der die Behandlung von Singularitäten (fast) zum Kinderspiel macht und dessen mögliche Anwendungen ein eigenes Buch füllen könnten. Sind komplexe Zahlen und Reihen schon bekannt, so kann man sich all dies – vielleicht da und dort noch ein wenig gestrafft – in einem halben Semester aneignen. Traditionell ist dies eher Stoff für ein ganzes Semester, dann würde man aber noch ein paar Themen aus den folgenden Kapiteln hinzunehmen, insbesondere die Verallgemeinerung der Cauchy-Theorie auf Ketten und Zyklen und den eleganten Beweis von Dixon für den Cauchy'schen Integralsatz.

Das vierte Kapitel baut vor allem auf dem Residuensatz auf und stellt Verfahren zur Konstruktion von komplex-differenzierbaren Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen und Singularitäten in den Mittelpunkt. Die Gamma-Funktion ist nur ein wichtiges Beispiel, die elliptischen Funktionen mit ihren vielfältigen Beziehungen zur Algebra und Geometrie ein anderes. Außerdem ergeben sich ganz unerwartet die Summen gewisser aus dem Reellen bekannter Reihen, die in den Anfangssemestern meist gar nicht (oder nur mühsam auf dem Umweg über die Fourier-Theorie) berechnet werden.

Möbius-Transformationen werden schon im ersten Kapitel definiert, danach immer wieder aufgegriffen und schließlich ausführlich im fünften Kapitel benutzt, u.a. beim Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes, einer besonderen Perle der Funktionentheorie. Mit seiner Hilfe können einfach zusammenhängende Gebiete topologisch charakterisiert und die Cauchy-Theorie zum Abschluss gebracht werden. Der Rest des letzten Kapitels widmet sich der holomorphen Fortsetzung und stellt dafür als besonders mächtiges Werkzeug das Spiegelungsprinzip zur Verfügung. Damit werden die Zusammenhänge zwischen elliptischen Integralen, elliptischen Funktionen und elliptischen Kurven deutlich gemacht.

Jedes Kapitel endet mit einem Abschnitt über Anwendungen. Das beginnt mit dem Gebrauch von komplexen Zahlen und harmonischen Funktionen in der Geometrie, der Elektrotechnik, der ebenen Feldtheorie und z.B. auch bei der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der Residuensatz liefert viele Lösungen für kompliziertere Integrationsprobleme, auch solche, bei denen Polstellen auf dem Integrationsweg auftreten, und Methoden der Umkehrung von Integral-Transformationen. Nach Einführung des unendlich fernen Punktes kann auf fortgeschrittene Methoden wie asymptotische Entwicklungen und die Sattelpunktmethode zur asymptotischen Integralauswertung eingegangen werden.

Die Möbius-Transformationen finden Eingang in die fraktale Geometrie und liefern ein Modell für die Bewegungen in der nichteuklidischen Geometrie. Anfänge der analytischen Zahlentheorie ergeben sich aus dem Studium der Zeta-Funktion. Deren Nullstellen sind Inhalt eines der größten ungelösten Probleme der Mathematik, der „Riemann'schen Vermutung".

Als Anwendung des Spiegelungsprinzips gewinnt man Formeln für die konforme Abbildung von Polygongebieten auf den Einheitskreis oder die obere Halbebene, die Umkehrung wird durch Jacobi'sche elliptische Funktionen gegeben. Elliptische Kurven bieten einen Abstecher in die algebraische Geometrie. Da sie dort auch über endlichen Körpern betrachtet werden können, sind sie ein wichtiges Thema in der Kryptographie.

Das Buch wendet sich an Studierende im dritten oder vierten Semester Mathematik, aber durch die Darstellung und die umfangreichen Anwendungsbeispiele ist es auch für Studierende der Physik und der Ingenieurwissenschaften bestens geeignet. Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse aus der reellen Analysis von einer und mehreren Veränderlichen und ein paar einfache Tatsachen aus der linearen Algebra. Vorkenntnisse aus der mengentheoretischen Topologie wären zwar hilfreich, aber alles, was nötig ist, wird im Text bereitgestellt.

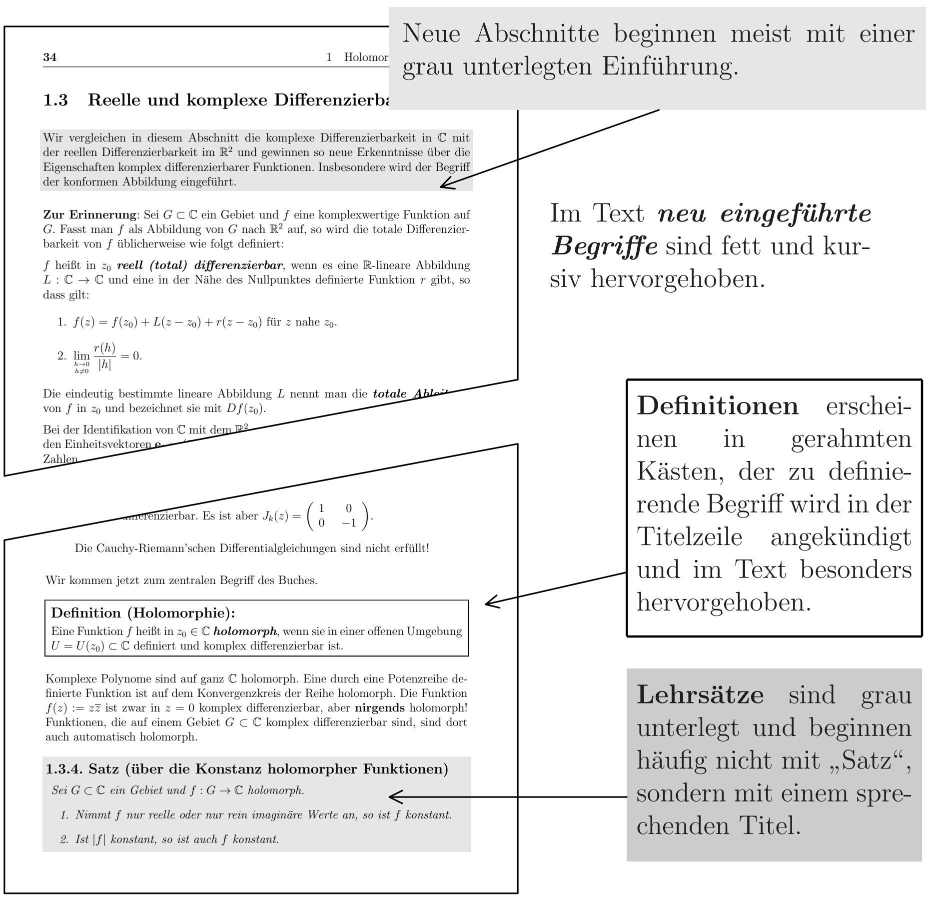
Wuppertal, im Oktober 2008 Klaus Fritzsche

Vorwort zur 2. Auflage

Vorrangigstes Ziel der zweiten Auflage war zunächst die Beseitigung von Druckfehlern, Unklarheiten und kleinen Irrtümern, sowie die Aufnahme vollständiger Lösungen zu sämtlichen Aufgaben. Ein paar inhaltliche Verbesserungen und Erweiterungen boten sich bei der Gelegenheit an, sie werden weiter unten beschrieben.

Um eine flexiblere Auflagenplanung des Grundkurses Funktionentheorie zu ermöglichen, hat der Verlag beschlossen, das Werk ab der zweiten Auflage einfarbig zu drucken. Deshalb wurden alle Illustrationen sorgfältig überarbeitet und mit Graustufen neu gestaltet, so dass kein Qualitätsverlust entstanden ist und sogar größere Klarheit erreicht wurde.

Beim Layout werden jetzt folgende Gestaltungsmittel benutzt:



In Kapitel 3 wurden die Integralberechnungen etwas erweitert und besser strukturiert, sowie der Satz von Hurwitz schon dort bewiesen. Neu ist Abschnitt 3.4, „Der verallgemeinerte Integralsatz“, der Teile des Abschnittes 5.1 aus der ersten Auflage und jetzt auch den Residuensatz in allgemeinster Form enthält. Außerdem wurden die Anwendungen zu Kapitel 3 teils erweitert und teils etwas gestrafft. Im Sinne einer Vereinheitlichung wird nun überall das Riemann'sche Integral verwendet.

Der Abschnitt „Holomorphie im Unendlichen“ wurde gekürzt, weil die Automorphismengruppen von Gebieten nun erst in Abschnitt 5.1 behandelt werden, und der Abschnitt über „Normale Familien“ taucht jetzt – in erweiterter Form – auch erst im nächsten Kapitel auf. Folgerichtig mussten einige Anwendungen zwischen Kapitel 4 und 5 verschoben werden. Außerdem wurde der Abschnitt über die Zetafunktion um einige Beweise ergänzt, insbesondere wird nun der komplette Beweis der Funktionalgleichung präsentiert.

Im Kapitel 5 über „Geometrische Funktionentheorie“ findet man am Anfang die weiter vorne ausgelassenen Themen: Es beginnt mit dem Abschnitt über „Automorphismen von Gebieten“, der jetzt auch Ergebnisse über die Beziehung zwischen Möbiustransformationen und Drehungen der Sphäre enthält, sowie eine Einführung in die sphärische Weglänge, auf die später Bezug genommen wird. Es folgt der Abschnitt über „Normale Familien“, in dem nun genauer zwischen holomorphen und meromorphen Familien unterschieden und die sphärische Ableitung und der Satz von Marty präsentiert wird.

Der Abschnitt „Der Riemann'sche Abbildungssatz“ ist gegenüber der entsprechenden Version in der ersten Auflage stark verkürzt, weil vieles schon an früherer Stelle behandelt wurde. Die restlichen Abschnitte von Kapitel 5 entsprechen bis auf kleine Erweiterungen den alten Abschnitten 5.2 bis 5.4.

Zum Schluss möchte ich mich pauschal bei allen Lesern bedanken, die mich auf Druckfehler aufmerksam gemacht oder Verbesserungen vorgeschlagen haben. Außerdem möchte ich mich bei Barbara Lühker und Andreas Rüdinger vom Springer-Verlag bedanken, die mich wie immer mit viel Geduld und Sachkenntnis unterstützt haben.

Wuppertal, im Oktober 2019 Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis