

LEHRBUCH

Klaus Fritzsche

Grundkurs Funktionentheorie

Eine Einführung in die komplexe
Analysis und ihre Anwendungen

2. Auflage



Springer Spektrum

Grundkurs Funktionentheorie

Klaus Fritzsche

Grundkurs Funktionentheorie

Eine Einführung in die komplexe
Analysis und ihre Anwendungen

2. Auflage

Klaus Fritzsche
Bergische Universität Wuppertal
Wuppertal, Deutschland

ISBN 978-3-662-60381-9 ISBN 978-3-662-60382-6 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-60382-6>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2009, 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Aus dem Vorwort zur 1. Auflage:

Die Funktionentheorie besticht durch Eleganz und Kraft, sie zeigt sich als eine in sich abgeschlossene Theorie, die dennoch zahlreiche andere Gebiete der Mathematik befruchtet und sich durch ihre Anwendbarkeit einen wichtigen Platz in den Natur- und Ingenieurwissenschaften erobert hat. Für den Mathematiker steht die Funktionentheorie an der Schnittstelle zwischen den drei großen Gebieten Algebra, Geometrie und Analysis und liefert unverzichtbare Beiträge zu allen drei Disziplinen. Anwender, die neben einer Reihe anderer wichtiger Methoden immer wieder Integrale und Integraltransformationen mit all ihren Facetten benutzen müssen, schätzen die Funktionentheorie, die jenseits der klassischen Methoden zur Bestimmung von Stammfunktionen ganz neue, starke und dennoch leicht zu handhabende Werkzeuge bereitstellt.

Studienanfängern stellt sich die Funktionentheorie als eine erste Begegnung mit neuen, unbekanntem Welten dar, die über den Schulhorizont weit hinausgehen. Deshalb wird die Funktionentheorie am Anfang als besonders schwer empfunden, obwohl sie das überhaupt nicht ist. Hier muss man sich wirklich auf Neues einlassen und in Kauf nehmen, dass man mit Gegenständen zu arbeiten hat, die sich der Anschauung entziehen. Dies ist zugleich die Chance, in der Welt der Mathematik „erwachsen“ zu werden. Hat man die Funktionentheorie erfolgreich studiert und damit auch immer wieder Wechsel der Betrachtungsrichtung vollzogen, so hat man die mathematischen Denk- und Arbeitsweisen begriffen und ist bereit, sich auch noch weit anspruchsvolleren Zielen zuzuwenden.

Die ersten drei Kapitel dieses Buches umfassen den eigentlichen Kern der Funktionentheorie, von der Einführung komplexer Zahlen und Funktionen und deren Differenzierbarkeit über die faszinierend einfache und doch verblüffend mächtige Theorie der komplexen Kurvenintegrale mit allen Wundern der Cauchy-Theorie bis hin zum Höhepunkt, dem Residuensatz, der die Behandlung von Singularitäten (fast) zum Kinderspiel macht und dessen mögliche Anwendungen ein eigenes Buch füllen könnten. Sind komplexe Zahlen und Reihen schon bekannt, so kann man sich all dies – vielleicht da und dort noch ein wenig gestrafft – in einem halben Semester aneignen. Traditionell ist dies eher Stoff für ein ganzes Semester, dann würde man aber noch ein paar Themen aus den folgenden Kapiteln hinzunehmen, insbesondere die Verallgemeinerung der Cauchy-Theorie auf Ketten und Zyklen und den eleganten Beweis von Dixon für den Cauchy'schen Integralsatz.

Das vierte Kapitel baut vor allem auf dem Residuensatz auf und stellt Verfahren zur Konstruktion von komplex-differenzierbaren Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen und Singularitäten in den Mittelpunkt. Die Gamma-Funktion ist nur ein wichtiges Beispiel, die elliptischen Funktionen mit ihren vielfältigen Beziehungen zur Algebra und Geometrie ein anderes. Außerdem ergeben sich ganz unerwartet die Summen gewisser aus dem Reellen bekannter Reihen, die in den Anfangssemestern meist gar nicht (oder nur mühsam auf dem Umweg über die Fourier-Theorie) berechnet werden.

Möbius-Transformationen werden schon im ersten Kapitel definiert, danach immer wieder aufgegriffen und schließlich ausführlich im fünften Kapitel benutzt, u.a. beim Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes, einer besonderen Perle der Funktionentheorie. Mit seiner Hilfe können einfach zusammenhängende Gebiete topologisch charakterisiert und die Cauchy-Theorie zum Abschluss gebracht werden. Der Rest des letzten Kapitels widmet sich der holomorphen Fortsetzung und stellt dafür als besonders mächtiges Werkzeug das Spiegelungsprinzip zur Verfügung. Damit werden die Zusammenhänge zwischen elliptischen Integralen, elliptischen Funktionen und elliptischen Kurven deutlich gemacht.

Jedes Kapitel endet mit einem Abschnitt über Anwendungen. Das beginnt mit dem Gebrauch von komplexen Zahlen und harmonischen Funktionen in der Geometrie, der Elektrotechnik, der ebenen Feldtheorie und z.B. auch bei der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der Residuensatz liefert viele Lösungen für kompliziertere Integrationsprobleme, auch solche, bei denen Polstellen auf dem Integrationsweg auftreten, und Methoden der Umkehrung von Integral-Transformationen. Nach Einführung des unendlich fernen Punktes kann auf fortgeschrittene Methoden wie asymptotische Entwicklungen und die Sattelpunktmethode zur asymptotischen Integralauswertung eingegangen werden.

Die Möbius-Transformationen finden Eingang in die fraktale Geometrie und liefern ein Modell für die Bewegungen in der nichteuklidischen Geometrie. Anfänge der analytischen Zahlentheorie ergeben sich aus dem Studium der Zeta-Funktion. Deren Nullstellen sind Inhalt eines der größten ungelösten Probleme der Mathematik, der „Riemann'schen Vermutung“.

Als Anwendung des Spiegelungsprinzips gewinnt man Formeln für die konforme Abbildung von Polygonebenen auf den Einheitskreis oder die obere Halbebene, die Umkehrung wird durch Jacobi'sche elliptische Funktionen gegeben. Elliptische Kurven bieten einen Absteher in die algebraische Geometrie. Da sie dort auch über endlichen Körpern betrachtet werden können, sind sie ein wichtiges Thema in der Kryptographie.

Das Buch wendet sich an Studierende im dritten oder vierten Semester Mathematik, aber durch die Darstellung und die umfangreichen Anwendungsbeispiele ist es auch für Studierende der Physik und der Ingenieurwissenschaften bestens geeignet. Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse aus der reellen Analysis von einer und mehreren Veränderlichen und ein paar einfache Tatsachen aus der linearen Algebra. Vorkenntnisse aus der mengentheoretischen Topologie wären zwar hilfreich, aber alles, was nötig ist, wird im Text bereitgestellt.

Vorwort zur 2. Auflage

Vorrangigstes Ziel der zweiten Auflage war zunächst die Beseitigung von Druckfehlern, Unklarheiten und kleinen Irrtümern, sowie die Aufnahme vollständiger Lösungen zu sämtlichen Aufgaben. Ein paar inhaltliche Verbesserungen und Erweiterungen boten sich bei der Gelegenheit an, sie werden weiter unten beschrieben. Um eine flexiblere Auflagenplanung des Grundkurses Funktionentheorie zu ermöglichen, hat der Verlag beschlossen, das Werk ab der zweiten Auflage einfarbig zu drucken. Deshalb wurden alle Illustrationen sorgfältig überarbeitet und mit Graustufen neu gestaltet, so dass kein Qualitätsverlust entstanden ist und sogar größere Klarheit erreicht wurde.

Beim Layout werden jetzt folgende Gestaltungsmittel benutzt:

34
1 Holomor

Neue Abschnitte beginnen meist mit einer grau unterlegten Einführung.

1.3 Reelle und komplexe Differenzierbarkeit

Wir vergleichen in diesem Abschnitt die komplexe Differenzierbarkeit in \mathbb{C} mit der reellen Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^2 und gewinnen so neue Erkenntnisse über die Eigenschaften komplex differenzierbarer Funktionen. Insbesondere wird der Begriff der konformen Abbildung eingeführt.

Zur Erinnerung: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine komplexwertige Funktion auf G . Fasst man f als Abbildung von G nach \mathbb{R}^2 auf, so wird die totale Differenzierbarkeit von f üblicherweise wie folgt definiert:

f heißt in z_0 **reell (total) differenzierbar**, wenn es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und eine in der Nähe des Nullpunktes definierte Funktion r gibt, so dass gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$ für z nahe z_0 .
2. $\lim_{h \rightarrow z_0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$.

Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung L nennt man die **totale Ableitung** von f in z_0 und bezeichnet sie mit $Df(z_0)$.

Bei der Identifikation von \mathbb{C} mit dem \mathbb{R}^2 der Einheitsvektoren e_1, e_2 und den reellen Zahlen

Im Text *neu eingeführte Begriffe* sind fett und kurz-siv hervorgehoben.

Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt!

Wir kommen jetzt zum zentralen Begriff des Buches.

Definition (Holomorphie):
Eine Funktion f heißt in $z_0 \in \mathbb{C}$ **holomorph**, wenn sie in einer offenen Umgebung $U = U(z_0) \subset \mathbb{C}$ definiert und komplex differenzierbar ist.

Komplexe Polynome sind auf ganz \mathbb{C} holomorph. Eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion ist auf dem Konvergenzreis der Reihe holomorph. Die Funktion $f(z) := z\bar{z}$ ist zwar in $z = 0$ komplex differenzierbar, aber **nirgends** holomorph! Funktionen, die auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind, sind dort auch automatisch holomorph.

Definitionen erscheinen in gerahmten Kästen, der zu definierende Begriff wird in der Titelzeile angekündigt und im Text besonders hervorgehoben.

1.3.4. Satz (über die Konstanz holomorpher Funktionen)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

1. Nimmt f nur reelle oder nur rein imaginäre Werte an, so ist f konstant.
2. Ist $|f|$ konstant, so ist auch f konstant.

Lehrsätze sind grau unterlegt und beginnen häufig nicht mit „Satz“, sondern mit einem sprechenden Titel.

In Kapitel 3 wurden die Integralberechnungen etwas erweitert und besser strukturiert, sowie der Satz von Hurwitz schon dort bewiesen. Neu ist Abschnitt 3.4, „Der verallgemeinerte Integralsatz“, der Teile des Abschnittes 5.1 aus der ersten Auflage

und jetzt auch den Residuensatz in allgemeinsten Form enthält. Außerdem wurden die Anwendungen zu Kapitel 3 teils erweitert und teils etwas gestrafft. Im Sinne einer Vereinheitlichung wird nun überall das Riemann'sche Integral verwendet.

Der Abschnitt „Holomorphie im Unendlichen“ wurde gekürzt, weil die Automorphismengruppen von Gebieten nun erst in Abschnitt 5.1 behandelt werden, und der Abschnitt über „Normale Familien“ taucht jetzt – in erweiterter Form – auch erst im nächsten Kapitel auf. Folgerichtig mussten einige Anwendungen zwischen Kapitel 4 und 5 verschoben werden. Außerdem wurde der Abschnitt über die Zetafunktion um einige Beweise ergänzt, insbesondere wird nun der komplette Beweis der Funktionalgleichung präsentiert.

Im Kapitel 5 über „Geometrische Funktionentheorie“ findet man am Anfang die weiter vorne ausgelassenen Themen: Es beginnt mit dem Abschnitt über „Automorphismen von Gebieten“, der jetzt auch Ergebnisse über die Beziehung zwischen Möbiustransformationen und Drehungen der Sphäre enthält, sowie eine Einführung in die sphärische Weglänge, auf die später Bezug genommen wird. Es folgt der Abschnitt über „Normale Familien“, in dem nun genauer zwischen holomorphen und meromorphen Familien unterschieden und die sphärische Ableitung und der Satz von Marty präsentiert wird.

Der Abschnitt „Der Riemann'sche Abbildungssatz“ ist gegenüber der entsprechenden Version in der ersten Auflage stark verkürzt, weil vieles schon an früherer Stelle behandelt wurde. Die restlichen Abschnitte von Kapitel 5 entsprechen bis auf kleine Erweiterungen den alten Abschnitten 5.2 bis 5.4.

Zum Schluss möchte ich mich pauschal bei allen Lesern bedanken, die mich auf Druckfehler aufmerksam gemacht oder Verbesserungen vorgeschlagen haben. Außerdem möchte ich mich bei Barbara Lühker und Andreas Rüdinger vom Springer-Verlag bedanken, die mich wie immer mit viel Geduld und Sachkenntnis unterstützt haben.

Wuppertal, im Oktober 2019

Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis

Aus dem Vorwort zur 1. Auflage	v
Vorwort zur 2. Auflage	vii
Inhaltsverzeichnis	ix
1 Holomorphe Funktionen	1
1.1 Die komplexen Zahlen	1
1.2 Komplex differenzierbare Funktionen	18
1.3 Reelle und komplexe Differenzierbarkeit	34
1.4 Der komplexe Logarithmus	43
1.5 Anwendungen	50
Summenberechnungen • Differentialgleichungen • Komplexe Zahlen in der Geometrie • Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik • Harmonische Funktionen und ebene Strömungsfelder.	
2 Integration im Komplexen	69
2.1 Komplexe Kurvenintegrale	69
2.2 Der Cauchy'sche Integralsatz	77
2.3 Der Entwicklungssatz	87
2.4 Anwendungen	100
Das Dirichlet-Problem • Ebene Felder • Die Green'sche Funktion.	
3 Isolierte Singularitäten	113
3.1 Laurent-Reihen	113
3.2 Umlaufszahlen	126
3.3 Der Residuensatz	136
3.4 Der verallgemeinerte Integralsatz	152
3.5 Anwendungen	159
Partialbruchzerlegung • Integralberechnungen • Cauchy'sche Hauptwerte und Dispersionsrelationen • Fourier-Transformationen • Laplace-Transformationen.	
4 Meromorphe Funktionen	189
4.1 Holomorphie im Unendlichen	189

4.2	Der Satz von Mittag-Leffler	198
4.3	Der Weierstraß'sche Produktsatz	206
4.4	Die Gamma-Funktion	215
4.5	Elliptische Funktionen	224
4.6	Anwendungen	234
	Reihenberechnungen I • Reihenberechnungen II • Das Residuum im unendlich fernen Punkt • Asymptotische Entwicklungen • Die Sattelpunktmethode • Die Riemann'sche Zeta-Funktion • Elliptische Kurven.	
5	Geometrische Funktionentheorie	267
5.1	Automorphismen von Gebieten	267
5.2	Normale Familien	277
5.3	Der Riemann'sche Abbildungssatz	287
5.4	Holomorphe Fortsetzung	294
5.5	Randverhalten	299
5.6	Das Spiegelungsprinzip	307
5.7	Anwendungen	313
	Die Mandelbrot-Menge • Nichteuklidische Geometrie • Die Formel von Schwarz-Christoffel • Elliptische Integrale und Jacobi'sche elliptische Funktionen.	
6	Lösungen zu den Aufgaben	331
6.1	Lösungen zu Kapitel 1	331
6.2	Lösungen zu Kapitel 2	339
6.3	Lösungen zu Kapitel 3	346
6.4	Lösungen zu Kapitel 4	359
6.5	Lösungen zu Kapitel 5	372
	Literaturverzeichnis	387
	Symbolverzeichnis	389
	Stichwortverzeichnis	391