LEHRBUCH

Peter Knabner
Balthasar Reuter
Raphael Schulz

Mit Mathe richtig anfangen

Eine Einführung mit integrierter Anwendung der Programmiersprache Python

EXTRAS ONLINE

Springer Spektrum

Mit Mathe richtig anfangen

Peter Knabner · Balthasar Reuter · Raphael Schulz

Mit Mathe richtig anfangen

Eine Einführung mit integrierter Anwendung der Programmiersprache Python

Springer Spektrum

Peter Knabner
Department Mathematik,
Lehrstuhl Angewandte Mathematik 1
Universität Erlangen-Nürnberg
Erlangen, Deutschland

Balthasar Reuter
Department Mathematik,
Lehrstuhl Angewandte Mathematik 1
Universität Erlangen-Nürnberg
Erlangen, Deutschland

Raphael Schulz
Department Mathematik,
Lehrstuhl Angewandte Mathematik 1
Universität Erlangen-Nürnberg
Erlangen, Deutschland

Ergänzendes Material zu diesem Buch finden Sie auf http://extras.springer.com und auf https://math.fau.de/knabner/MMra.

ISBN 978-3-662-59229-8 ISBN 978-3-662-59230-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-59230-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung/Lektorat: Annika Denkert

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort für Schüler*innen und Studienanfänger*innen

Sie möchten eventuell Mathematik studieren, wissen aber noch nicht, was wirklich auf Sie zukommt? Sie möchten vielleicht Mathematik studieren, aber haben Angst, dass Sie den Übergang von der Schule zur Universität nicht schaffen? Sie möchten Mathematik studieren, sich aber schon vor dem Studium so vorbereiten, dass der Studieneinstieg besser klappt? Sie möchten Mathematik studieren und sind sich sicher, dass alles gut geht, da Sie ja in der Schule sehr gut waren? Sie möchten eher nicht Mathematik studieren, „Knobeln" und Nachdenken im Mathematikunterricht hat Ihnen aber doch Spaß gemacht?

Wenn eine dieser oder eine ähnliche Frage auf Sie zutrifft, sollten Sie erwägen die Hilfestellung, die dieses Buch leisten möchte, wahrzunehmen. Ziel ist es, dass der/die Leser*in die wissenschaftlich-mathematische Denkweise, die an der Universität vorherrscht, kennenlernt. Bei einem Mathematikstudium spielt aber auch eine große Rolle, dass die Schulmathematik zwar inhaltlich noch deutliche Überlappungen mit der Mathematik des ersten Studienjahrs hat, aber schon von Anfang an das Maß an Rigorosität und Abstraktion eine große, manchmal unüberwindliche Hürde darstellt. Dies ist verbunden mit einer Schwerpunktverschiebung weg vom „Rechnen" hin zum Verstehen und Entwickeln von Mathematik.

Das Buch ist zum Selbststudium gedacht, mit vielen Übungsaufgaben und zugehörigen Lösungen, entweder in der „langen Freizeit" zwischen Schulabschluss und Studium oder auch schon zur Schulzeit oder begleitend zu den ersten Studiensemestern. Mathematik spielt auch in den ersten Studiensemestern der Physik, der Informatik und in allen Ingenieurstudiengängen eine große Rolle. Daher sollte auch für zukünftige Studierende dieser Fächer ein Studium dieses Buches eine Hilfestellung sein. Dabei ist aber zu beachten:

Was will dieses Buch nicht leisten:

Es handelt sich hier im Gegensatz zu vielen Büchern mit ähnlichem Titel (Brückenkurs,...) nicht um eine Wiederholung der Schulmathematik. Studiengänge der Natur- und Ingenieurwissenschaften, für die die Mathematik Werkzeugcharakter hat und für die schon von Anfang an eine gute Beherrschung des Schulstoffs notwendig ist, brauchen diese Auffrischung und Vertiefung. In einem Mathematikstudium fängt alles „von vorne" an (wobei eine gute Beherrschung der Schulmathematik natürlich sehr hilfreich ist).

Was will dieses Buch leisten:

Das Mathematikstudium erfordert von Beginn an Denk- und Arbeitsweisen, die sich wesentlich von denen der Schule unterscheiden. Dies stellt viele Studierende, welche dies nicht erwartet haben, vor große Probleme. Die Leser*innen werden deswegen an das Beweisen von Aussagen mit Hilfe von logischen Argumentationen herangeführt und lernen, Aussagen allgemeingültig zu beweisen. Das dafür gebrauchte mathematische Vorwissen ist (zumindest für die Kapitel 1-4) sehr gering und spätestens ab der 10. Jahrgangsstufe vorhanden.

Das Buch gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil wird in die Grundlagen des mathematischen oder allgemein des logischen Arbeitens eingeführt:

Mathematik hat mit Logik zu tun, aber wie genau und was ist Logik? Was ist die Basis für mathematisches Denken, wann sind mathematische Gedankengänge „präzise“, und wie drückt man sie aus und schreibt sie auf? Die Grundlagen dafür sind Logik und Mengenlehre, die im Teil I entwickelt werden. Dies entspricht dem, was i. Allg. in einem Vorkurs vor Studienbeginn gelehrt wird, und stellt die unverzichtbare Grundlage für ein Mathematikstudium dar. Wenn Sie diesen Teil durchgearbeitet und sich mit der dort betriebenen Abstraktion angefreundet haben, werden Sie uns hoffentlich zustimmen, dass der Stoff gar nicht zu schwer ist,[1], aber doch etwas „trocken“. Es fehlen die in der Schule allgegenwärtigen Zahlen.

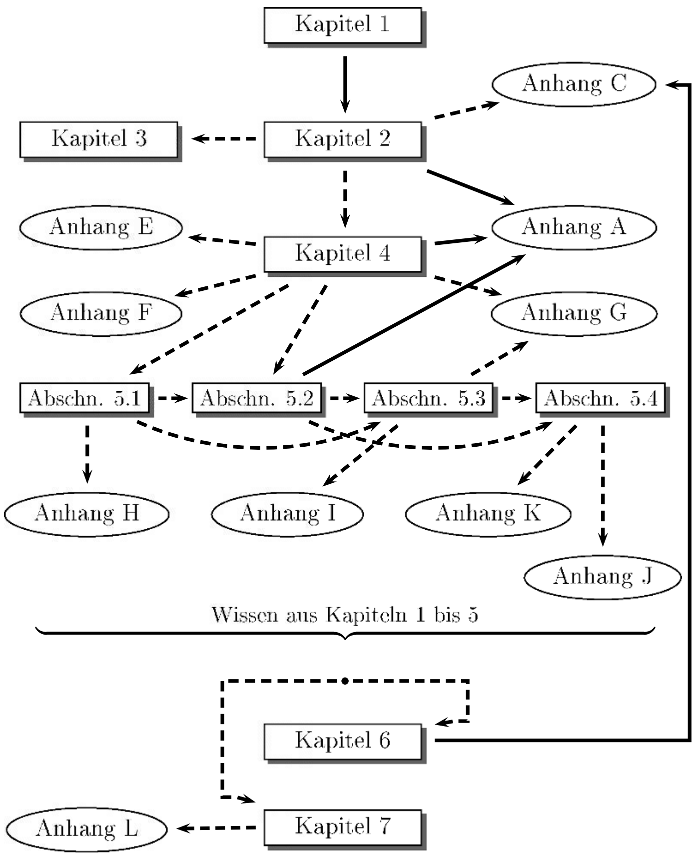
Mathematik, wie jede mit „können“ verbundene Tätigkeit, lernt man nur durch eigenständiges Üben und Tun. Dies soll im Teil II anhand der Zahlen erfolgen. Es geht um die Frage, was Zahlen eigentlich „sind“ und „wo sie herkommen“. Der Weg führt dabei von den natürlichen zu den ganzen und rationalen und schließlich zu den reellen Zahlen und ihrem „Innenleben“. Angefangen von $\sqrt{2}$ werden dann die Zahlen nicht mehr exakt „hinschreibbar“, sondern nur noch „beliebig genau berechenbar“ (approximierbar). Solche Rechenverfahren (Algorithmen) lässt man besser Computer machen. Daher wird integriert auch in die Programmiersprache PYTHON eingeführt und alle entwickelten Algorithmen, von der Definition einer Addition durch Hochzählen bis zur hoch genauen Approximation der Kreiszahl π, damit realisiert. Es geht hier den Autoren darum, schon von Anfang an zu vermitteln, was Mathematik für unsere Gesellschaft bedeutend macht (und damit auch Mathematiker für Wirtschaftsunternehmen). Es geht nicht nur um *Abstraktion* und das Erkennen *struktureller Zusammenhänge*, sondern auch darum, auf dieser Basis Abstraktes greifbar, d. h. durch (effiziente) *Algorithmen berechenbar*, d. h. beliebig gut approximierbar zu machen. Wenn Sie das Buch ab Kapitel 5 durchblättern, werden Sie sehen, dass die konkreten Zahlen wieder in Fülle da sind.

Die unverzichtbare *Abstraktion und Rigorosität* ist gewiss ein Stolperstein auf dem Weg in ein erfolgreiches Mathematikstudium, sollte aber doch von einer Generation, die zum Beispiel durch Videospiele auf ein regelbasiertes Verhalten trainiert ist, bewältigbar sein. Ein vielleicht größerer Stolperstein ist die enorme *Vernetzungsdichte* der Mathematik, die trotz der scheinbar wohldefinierten Teildisziplinen, die sich auch in den Anfängervorlesungen *Analysis* und *Lineare Algebra* widerspiegeln, oft Mathematik erst fruchtbar werden lässt, wenn sie viele ihrer vielfältigen Zweige verknüpft. Dies bedeutet für diesen Text, dass er eine sich aus seinen Zielen zwangsläufig ergebene Mischung aus Logik, Mengenlehre, Algebra, Analysis, Numerischer Mathematik und Aspekten der Informatik ist. Den Anfänger*innen müssen diese Begriffe nichts sagen, sie merken die Vernetzung an den vielen Querverweisen, die aus einer Abfolge von Sätzen erst einen Text im Wortsinn machen. Die Leser*innen werden nicht jedem dieser Verweise folgen und ihn verstehen müssen, es zeigt aber, dass eine jede Wissenschaft, aber vielleicht besonders die Mathe-

[1] wenn man nicht der Versuchung verfällt, was wir für Anfänger*innen für unangemessen halten, den Grundlagenfragen „exakt“ nachzuspüren

matik sich erst durch die Verknüpfung ihrer Begriffe und Ergebnisse entfaltet. Das mag Schwierigkeiten bedeuten vor dem Hintergrund eingeübter Lernmethoden, die Inhalte in „Schachteln“ und „Häppchen“ einteilt. Betrachten Sie die Vernetzungsdichte dieses Texts als Chance einzuüben, sich von solchem „Häppchen“-Denken zu lösen.

Dieses Buch ist modular aufgebaut, sodass Sie entscheiden können, wie viel Sie sich „zumuten“ wollen, 152 Seiten Basistext zur Einführung in das mathematische Denken (= Teil I), 264 Seiten einübende Mathematik zur Welt der Zahlen (= Teil II), was wiederum in 114 Seiten elementaren (Kapitel 4, 7) und 150 Seiten anspruchsvolleren Teil (Kapitel 5, 6) zerfällt. Wer die Sache bis auf den Grund verstehen möchte, kann und sollte auch die Anhänge im Buch (Anhang A und B, 26 Seiten) sowie online (Anhang C bis N, ca. 90 Seiten) durcharbeiten. Dies zeigt, dass nach den unabdingbaren Grundlagen aus den Kapiteln 1, 2, (3) und 4, je nachdem wie viel Zeit investiert werden soll oder ob mehr strukturelle oder algorithmische Aspekte betont werden sollen, verschiedene Wege durch den restlichen Text gegangen werden können.



Wesentlich für das Verstehen und Aneignen von Mathematik ist es, sich aktiv mit dieser auseinanderzusetzen. Daher wird jeder Abschnitt (bis auf Abschnitt 3.1) mit Übungsaufgaben abgeschlossen. Für mindestens ein Drittel der Theorieaufgaben jedes Abschnitts (diese sind mit (L) gekennzeichnet) finden sich im Anhang B Lösungsvorschläge.

Zum Literaturverzeichnis: Dieses wurde auf wenige Lehrbücher begrenzt. Benutzte Literatur wird in Fußnoten zitiert. Darüber hinaus ist für viele historische Bemerkungen auf die entsprechenden insbesondere englischen WIKIPEDIA-Einträge zurückgegriffen worden, ohne diese weiter zu überprüfen. Für etwaige Ungenauigkeiten liegt die Verantwortung natürlich bei den Autoren.

Vorwort für Student*innen in frühen Semestern, insbesondere Lehramtstudierende

Vieles, was im Vorwort für Anfänger*innen steht, ist vielleicht auch für Sie relevant: Schauen Sie einmal hinein, des Weiteren:

Ein typisches Stoffgebiet ist der *Aufbau des Zahlensystems*. Dies finden Sie vollständig dargestellt, angereichert mit vielen Querverweisen in die Geschichte, insbesondere auch des Rechnens. Sie können iterative Approximationsverfahren (über einen programmierbaren Taschenrechner hinaus) mit eigenen PYTHON-Programmen in Aktion setzen und ihr Verhalten verstehen lernen.

Vorwort für (künftige) Informatikstudent*innen

Auch für Sie ist das Vorwort für Anfänger*innen relevant, allerdings sind zwei weitere Aspekte für Sie besonders von Interesse:

Informatik ist eng mit Mathematik verwandt, nicht zuletzt dadurch, dass sie sich (in großen Teilen) aus dieser entwickelt hat. In vielen Informatik- wie auch Ingenieurstudiengängen wird Mathematik aber nur als Hilfsmittel verstanden und gelehrt, eine fundierte Einführung in mathematische Denk- und Arbeitsweisen kann nur in begrenztem Umfang stattfinden. Gerade diese Kompetenzen können jedoch das Nachvollziehen der Strukturen und Konzepte der Informatik erheblich erleichtern und so die Basis für ein vollumfängliches Verständnis Ihres Hauptfaches liefern. Darüber hinaus ist für Sie, als potenzielle Softwareentwickler, ein detailliertes Verständnis der Zahldarstellung in Computern und den damit verbundenen Effekten nützlich: Kapitel 7 liefert Ihnen beides.

Vielleicht finden Sie aber auch eine algorithmische Herangehensweise intuitiver als die sonst üblichen rein axiomatischen Vorgehensweisen in der Mathematik, sodass die integrierte Darstellung der Algorithmen in der Programmiersprache PYTHON die Hürde für das Nachvollziehen der entsprechenden mathematischen Konstruktionen senkt. Insbesondere beim *Aufbau des Zahlensystems* sind Axiome und Algorithmen eng miteinander verwoben. Nutzen Sie diese Verknüpfung beider Denkweisen, um die großen Ähnlichkeiten zwischen beiden zu identifizieren und so den möglicherweise bisher fehlenden Zugang zur jeweils anderen zu finden.

Benötigte Vorkenntnisse

Wie gesagt, brauchen die Kapitel 1-3 und auch 4 (fast) gar keine mathematischen Vorkenntnisse. Das notwendige Abstraktionsvermögen sollte ab Jahrgangsstufe 10 vorhanden sein. Abschnitt 5.1 ist recht anspruchsvoll und kann auch nur kursorisch durchgegangen werden, als Belohnung liefert er eine exakte Definition des für die *Analysis* zentralen Begriffs des Grenzwertes. Einige weiterführende und Hilfsüberlegungen sind in Anhänge ausgelagert, die durchgearbeitet oder nicht durchgearbeitet werden können. Bei einigen Teilen ab Abschnitt 5.4 werden Differentiations- und Integrationskenntnisse der 11. und 12. Jahrgangsstufe benutzt. In den Abschnitten „Am Rande bemerkt" werden Ausblicke auf (für Anfänger*innen) zu schwierige Fragen gegeben, insbesondere dienen sie auch der Unterhaltung.

Online-Teil

Um die Länge des (gedruckten) Buches zu begrenzen, wurden die Anhänge, mit Ausnahme der Anhänge A–B, ausgelagert und sind unter der Adresse

`https://math.fau.de/knabner/MMra`

abrufbar. Nach Eingabe des Benutzernamens *MMra* sowie des Passworts *Peano*, finden sich die Anhänge C–M zum Download sowie sämtliche Lösungen zu den im Buch enthaltenen Aufgaben. Dort sind ebenfalls die Python-Quelltexte aller im Buch enthaltenen Algorithmen und Aufgaben verfügbar. Allerdings kann das Abtippen kurzer Algorithmen, durch das damit verbundene Auseinandersetzen mit den einzelnen Befehlen, durchaus das Verständnis erhöhen und sei daher an dieser Stelle explizit empfohlen. Zum Überprüfen der eigenen Lösungen, dem Experimentieren mit den vorgestellten Programmen oder auch dem Erweitern der bestehenden Algorithmen sollen Ihnen diese Quelltexte aber als Ausgangspunkt dienen.

Unser Dank

gilt allen, die uns inhaltlich und technisch unterstützt haben: Frau Cornelia Weber und Herrn Sebastian Czop, die die LaTeX-Version mit großer Sorgfalt erstellt und koordiniert haben, Herrn Prof. Dr. Wilhelm Merz für die stilistische Durchsicht einer früheren Version, Frau Dr. Annika Denkert und Frau Agnes Herrmann vom Springer Verlag für die fortwährende Beratung und schließlich unseren studentischen Hilfskräften Daria Gutina, Mathis Kelm, Robert Ternes und Nico Wittrock, die auch inhaltlich durch engagiertes Nachfragen und Nachrechnen zur Verbesserung des Textes beigetragen haben.

Erlangen, im März 2019

Peter Knabner
Balthasar Reuter
Raphael Schulz

Inhaltsverzeichnis