

LEHRBUCH

Albert Fässler

Schnelleinstieg Differentialgleichungen

anwendungsorientiert –
verständlich – kompakt

2. Auflage



Springer Spektrum

Schnelleinstieg Differentialgleichungen

Albert Fässler

Schnelleinstieg Differentialgleichungen

anwendungsorientiert –
verständlich – kompakt

2. Auflage

 Springer Spektrum

Albert Fässler
Evilard, Schweiz

ISBN 978-3-662-62145-5 ISBN 978-3-662-62146-2 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-62146-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018, 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Annika Denkert

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

*Ein dickes Buch ist
ein großes Übel.*

Gotthold Ephraim Lessing

Mit diesem Buch möchte ich Herrn Dr. Dr. h. c. mult. Eduard Stiefel, ehemaliger Professor für Mathematik an der ETH Zürich posthum ehren. Er hat mein mathematisches Denken nachhaltig geprägt und mich als Assistenten und danach als seinen wissenschaftlichen Mitarbeiter und Lehrbeauftragten gefördert. Prof. Stiefel hatte einen hervorragenden internationalen Ruf in der Fachwelt. Er war außerdem Computer-Pionier und ein hochgeschätzter Lehrer.

Üblicherweise besteht der Inhalt über Differentialgleichungen zum größten Teil aus dem Berechnen von Lösungen mit besonderen technischen Kenntnissen, wie beispielsweise komplexe Zahlen oder Partialbruchzerlegungen. Für viele Studierende, die nicht gerade Mathematik als Hauptfach betreiben, ist das in einer Zeit, in dem schon Taschenrechner symbolisch integrieren können, ein unnötig gewordenes Ärgernis, das den Zugang zum Thema entscheidend erschweren kann.

Hier wird hingegen bei aufwendigeren Problemen mit Nachdruck Wert darauf gelegt, die Richtigkeit von vorgegebenen Lösungen durch Differenzieren und Einsetzen nachzuweisen.

Das beinhaltet mehrere Vorteile:

- (a) Verifizieren der Richtigkeit fördert ein vertieftes Verständnis¹.
- (b) Differenzieren lernt man schon am Gymnasium.
- (c) Der zeitliche Aufwand dafür ist wesentlich geringer.
- (d) Der damit gewonnene Zeitgewinn wird für das mathematische Modellieren (das heißt für das Aufstellen von Differentialgleichungen zu einem vorgegebenen Problem) und Interpretieren von Lösungen eingesetzt, oft auch mit dem Generieren ihrer Graphen.

¹ Diese These vertritt auch der ungarische Mathematiker George Polya (1887–1985) mit Nachdruck in [31].

Auf längere und oft mühsame technische Beweise von Existenzsätzen, die bei Bedarf in der Literatur und dem Internet verfügbar sind, wurde zugunsten einer abwechslungsreichen Palette von Anwendungen aus verschiedenen Gebieten bewusst verzichtet. Hingegen habe ich Wert auf Gegenbeispiele gelegt und natürlich auf die Kenntnis des Inhalts solcher Theoreme.

Wir beschränken uns vorerst auf ein erstes Verständnis auf einfache Beispiele von Differentialgleichungen, welche von Hand mit elementaren Integralen gelöst werden können oder auf Fälle, bei denen die anfallenden Integrale mit einem Taschenrechner oder Computer gelöst werden können.

Für aufwendigere Probleme werden nicht zuletzt deshalb Lösungen vorgegeben, weil Computeralgebrasysteme, implementiert in Computern oder sogar Taschenrechnern, oft Differentialgleichungen lösen können.

Dabei kommen natürlich numerische Methoden zum Zug, wenn Integrale nicht mehr geschlossen elementar lösbar sind, was bei anspruchsvolleren Problemen oft der Fall ist. Grafiken sind in diesen Fällen oft besonders nützlich.

Im Inhalt werden exemplarisch einzelne Befehle und instruktive Kurzprogramme (mit Erklärungen) des Computeralgebrasystems „Mathematica“ mit den entsprechenden Outputs gegeben.

Als bessere und bequemere Alternative zum Taschenrechner können einzelne Befehle für Rechnungen und Grafiken im Internet direkt unter „Wolfram Alpha“ ausgeführt werden.

Das Buch richtet sich an ein breites Spektrum von Interessierten:

- angefangen bei mathematisch-naturwissenschaftlich motivierten Schülern gegen Ende der Sekundarstufe II (Gymnasien, Kantonsschulen)
- über Studierende an Fachhochschulen und Universitäten mit den Ausrichtungen Ingenieur- und Naturwissenschaften, Informatik und Ökonomie.
- und Dozierende an Pädagogischen Hochschulen als Beitrag zur Fachdidaktik
- bis hin zu Studierenden von Mathematik und Physik in den ersten Semestern, welche ohne Umschweife das Thema anwendungsbezogen angehen wollen.

Bei der Auswahl an Fragestellungen wurde Wert darauf gelegt, neben naturwissenschaftlichen auch spielerische Fälle zu analysieren.² Überhaupt ist es ja so, dass Spielerisches und auch Ästhetik über die Geometrie in der Mathematik gepflegt werden können. Beiden Aspekten habe ich Raum gegeben. Sie sind es auch, zusammen mit originellen, herausfordernden Denkaufgaben, welche mich zusätzlich zu meiner beruflichen Absicht dazu motiviert haben, Mathematik zu studieren.

Es ist wohl kein Zufall, dass ein Kurs in diesem Sinne auch an der Pädagogischen Hochschule der Fachhochschule Nordwestschweiz, den ich erst vor wenigen Jahren erteilt habe, von den Studierenden geschätzt wurde.

² Friedrich Schiller: „Der Mensch ist nur Mensch, wenn er spielt.“

Selbstverständlich wird die Mathematik auch auf breiter Basis als Werkzeug für das Modellieren und Lösen naturwissenschaftlicher Probleme eingesetzt. Dazu sind meine langjährigen Erfahrungen als Dozent am Departement für Technik und Informatik der Berner Fachhochschule BFH eingeflossen.

Kapitel 1 bietet eine Repetition von benötigten analytischen Vorkenntnissen mit vielen anwendungsbezogenen Beispielen und Aufgaben an. Dabei habe ich auf die mühselige und langweilige Einführung der Exponentialfunktion über gebrochenen Exponenten zugunsten eines Einstiegs über die Potenzreihe mittels Richtungsfeld verzichtet. Damit ist bereits ein sanfter Einstieg in die spezielle Differentialgleichung $y' = y$ mit einem Ansatz für die Fortsetzung gemacht!

Ich habe mich bemüht, auch Problemstellungen einzustreuen, welche Spaß machen. Als weiterführende Literatur eignet sich etwa [4].

Dankesworte an verschiedene Persönlichkeiten

Ein ganz besonderes großes Dankeschön geht an meine Studienkollegin, Frau Dr. Baoswan Dzung Wong. Sie hat sowohl inhaltlich wie redaktionell zu einer erheblichen Verbesserung des Buches beigetragen. Mit ihr hatte ich das Vergnügen, das Mathematikstudium an der ETH Zürich gemeinsam zu bestreiten. Ihr verdanke ich viele interessante fachliche und fachdidaktische Diskussionen und Anregungen in all den vergangenen Jahrzehnten.

Mein geschätzter Berufskollege Dr. Walter Businger am Departement Technik und Informatik der BFH hat zu den Grafiken beigetragen und sich immer Zeit genommen, um meine \LaTeX -Probleme zu lösen. Gemeinsame mathematische Aktivitäten und fachliche Gespräche verbinden mich mit ihm seit vielen Jahren.

Der Hinweis auf [21] von Prof. Dr. Daniel Farinotti, Glaziologe an der ETHZ inspirierte meinen Beitrag *Globale Erwärmung*.

Für die angenehme Zusammenarbeit mit Dr. Annika Denkert (Lektorat), Anja Groth und Barbara Lühker (Projektmanagement) vom Springer Verlag und Tatjana Straszer (Copy-Editing) ein Merci nach Heidelberg.

Ein Dank geht an die Damen der Bibliothek des Departements Technik und Informatik der BFH in Biel/Bienne für ihre Hilfe.

Schließlich bedanke ich mich bei Olivier Fässler für das Lösen von Computer-Problemen und *last but not least* bei meiner Gattin Carmen Fässler für das Schaffen einer ruhigen und bequemen Arbeitsatmosphäre und ihr Verständnis, dass ich viele Stunden am Computer verbracht habe.

Zu Ihrem Schnelleinstieg wünsche ich Ihnen viel Vergnügen.

CH-2533 Evilard im September 2017
Albert Fässler

Vorwort zur 2. Auflage

Das gesamte Kapitel 6 mit den folgenden Abschnitten ist neu:

6.1 Klimawandel.

Es geht dabei um ein einfaches mathematisches Modell zur Analyse des zukünftigen Temperaturverlaufs der Erdoberfläche im Zusammenhang mit der CO₂-Problematik.

6.2 Epidemiologie.

Analyse des SIR- und das SEIR-Modells unter Berücksichtigung der Coronapandemie.

6.3 Brownsche Bewegung und Langevin-Gleichung.

6.4 Kalman-Filter.

Herrn Professor Dr. Nicolas Gruber, Professor für Umweltphysik am Departement Umweltsystemwissenschaften der ETH Zürich, danke ich für seine äußerst wertvolle aktive Mitarbeit zum Thema Klimawandel.

Die Abschnitte 6.3 und 6.4 wurden von Dr. sc. techn. ETH Dacfey Dzung verfasst. Ihm vedanke ich auch Unterstützung im Abschnitt 6.2 sowie Mithilfe bei einigen Aufgaben.

Neu sind folgende Aufgaben mit ihren Nummern:

- 22 Geometrie für Bahngeleise, Straßen und Sprungschanzen,
- 29 Fahrrad,
- 31 Denkaufgabe: Das Regen-Problem,
- 65 Baumwachstum nach Chapman-Richards,
- 96 Klimawandel,
- 97 SIR-Modell für Epidemien,
- 98 Impfaktion,
- 99 SEIR-Modell für Epidemien,
- 100 Zweite Welle,
- 101 Ricattische Differentialgleichung.

Frau Dr. Baoswan Dzung Wong verdanke ich mit ihrem präzisen Arbeitsstil und ihren exzellenten professionellen Fähigkeiten erhebliche fachliche wie redaktionelle Verbesserungen, inspirierende Interaktionen und Korrekturen von Fehlern. Mit ihr hatte ich das Vergnügen, das Mathematikstudium zeitgleich an der ETH Zürich zu

absolvieren. Danach setzte sie ihre Studien an der University of California in Berkeley fort und beendete sie mit einer Doktorarbeit im Bereich der Funktionalanalysis unter Führung von Professor Tosio Kato.

Für die erneute angenehme Zusammenarbeit mit Frau Dr. Annika Denkert (Lektorat) und Frau Anja Groth sowie Frau Tatjana Strasser vom Springer Verlag ein Merci beaucoup aus der Westschweiz nach Heidelberg.

Abschließend noch eine Aussage von Dr. Alessio Figalli, Professor an der ETH Zürich und Träger der Fields-Medaille³ 2018:

„Ich bin froh, ein solches Buch zu sehen. Es wird vielen Studenten, Professoren und Lehrkräften als Unterstützung dienen.“

CH-2533 Evilard im Juli 2020

Albert Fässler

³ Die Fields-Medaille wird wegen ihres langjährigen höchsten Prestiges oft als Ersatz für einen Nobelpreis für Mathematik angesehen.

Inhaltsverzeichnis

1	Benötigte analytische Vorkenntnisse	1
1.1	Exponential- und Logarithmusfunktion	1
1.1.1	Exponentialfunktion $\exp(x)$ als Potenzreihe	1
1.1.2	Eigenschaften von $\exp(x)$	4
1.1.3	Exponentialfunktion	5
1.1.4	Basiswechsel und hyperbolische Funktionen	6
1.1.5	Logarithmusfunktion	7
1.2	Integralrechnung	8
1.2.1	Integral	8
1.2.2	Hauptsatz der Integralrechnung	10
1.2.3	Zur Berechnung von Integralen	12
1.3	Anwendungen der Integral- und Differentialrechnung	14
1.3.1	Fluchtgeschwindigkeit	14
1.3.2	Elastizität in der Ökonomie	15
1.3.3	Harmonische Summe und Reihe	15
1.3.4	Optimales Stoppen	17
1.3.5	Fermatsches Prinzip, Snelliussches Brechungsgesetz	19
1.4	Parametrisierte Kurven oder vektorwertige Funktionen	20
1.4.1	Definition und Beispiele	20
1.4.2	Ellipse	25
1.4.3	Kurventangenten, Geschwindigkeitsvektoren	26
1.5	Übungen Kapitel 1	29
2	Differentialgleichungen 1. Ordnung	39
2.1	Begriffliches	39
2.2	Geometrisches, Richtungsfeld, Isoklinen	40
2.3	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	43
2.3.1	Homogener Fall	43
2.3.2	Inhomogener Fall	45
2.4	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	47
2.5	Separable Differentialgleichungen	49