LEHRBUCH

Heinz-Dieter Ebbinghaus

Einführung in die Mengenlehre

5. Auflage

Springer Spektrum

Einführung in die Mengenlehre

Heinz-Dieter Ebbinghaus

Einführung in die Mengenlehre

5. Auflage

Springer Spektrum

Heinz-Dieter Ebbinghaus
Mathematisches Institut
Universität Freiburg
Freiburg im Breisgau, Deutschland

ISBN 978-3-662-63865-1 ISBN 978-3-662-63866-8 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Als mathematische Einzelwissenschaft verkörpert die Mengenlehre eine typische axiomatisch-deduktive Theorie: Über einem Fundament von Axiomen erhebt sich das Gebäude der beweisbaren Sätze. Unter einem anderen Aspekt kommt ihr jedoch eine Sonderstellung zu: Mit einem gewachsenen mengentheoretischen Verständnis der Mathematik haben ihre Begriffsbildungen und Redeweisen Eingang in die meisten mathematischen Betrachtungen gefunden. Dabei hat sich herausgestellt, dass sie für praktisch alle mathematischen Theorien ein begriffliches Gerüst zu liefern vermag. Diese Entwicklung offenbart eine große Tragweite des Mengenbegriffs und der mengentheoretischen Axiome; sie verlangt nach sorgfältiger und kritischer Prüfung, und das um so mehr, als die ersten Axiomensysteme tatsächlich widerspruchsvoll waren.

Einer Einführung in die Mengenlehre erwachsen daher mehrere Aufgaben: Sie sollte einen Einblick in die Theorie geben, und sie sollte versuchen, die zugrunde gelegten Axiome möglichst weitgehend zu rechtfertigen. Das vorliegende Buch nimmt sich beider Forderungen an. Im ersten Teil wendet es sich überwiegend dem Aufbau der Theorie zu; im zweiten Teil steht dann die Diskussion der Axiome im Vordergrund. Die räumliche Trennung ist nicht scharf, zeigt es sich doch, dass beide Aspekte mannigfach miteinander verwoben sind und sich gegenseitig bedingen und fördern.

Zur Formulierung der mengentheoretischen Axiome und der Abklärung ihrer Tragweite bedarf es einer klar umrissenen Sprache. Sie wird bereits früh eingeführt, um in der Arbeit am Stoff mit ihr vertraut zu werden, wird jedoch möglichst ungezwungen verwendet. Um die Intuition zu stärken, nehmen die Argumentationen stets Bezug auf ein gleichsam objektiv gegebenes „Universum“ von Mengen, das es zu beschreiben gilt.

Die Lektüre des Buches erfordert keine spezifischen mathematischen Kenntnisse. Insofern richtet es sich nicht nur an Studierende der Mathematik, sondern an alle, die an den Grundlagen der Mathematik interessiert sind und die Fähigkeit und Bereitschaft mitbringen, Gedankengänge mathematischer Prägung nachzuvollziehen.

Eine kurze Schilderung des Inhalts:

Das erste Kapitel führt in die Problematik, den Nutzen und die Tragweite der Mengenlehre ein. Es deutet die Leitgedanken an, denen die spätere Darstellung folgt.

Die Kapitel II bis V enthalten die Elemente der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre bis zu einem mengentheoretischen Aufbau der Zahlsysteme. Um diesem Teil eine gewisse Geschlossenheit zu geben, werden einige Sonderfälle der erst in Kapitel VII folgenden Rekursionstheoreme vorab bewiesen.

Die Kapitel VI bis IX stellen das Rüstzeug für einen tieferen Einstieg in die Mengenlehre bereit: Ordinalzahlen, Rekursionstheoreme, das Auswahlaxiom mit einigen Äquivalenten, unendliche Mächtigkeiten und Kardinalzahlarithmetik. Den Abschluss bildet eine ausführliche Behandlung der Cantorschen Kontinuumshypothese.

Die Kapitel X bis XII widmen sich der Diskussion der mengentheoretischen Axiome. Im Zentrum von Kapitel X steht die kumulativ-hierarchische Struktur des Mengenuniversums. Der Nachweis der Gleichwertigkeit des Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystems mit einem auf dieser Struktur beruhenden Axiomensystem von Scott dient dazu, die inhaltliche Geschlossenheit der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre zu belegen. Kapitel XI beginnt mit einer Einführung in das Gebiet der Unabhängigkeitsbeweise. Die Behandlung der konstruktiblen Hierarchie Gödels – jetzt in geschlossener Form – erlaubt es, Beweise der relativen Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms und der Cantorschen Kontinuumshypothese zu erbringen und damit die Diskussion des Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystems in wesentlichen Punkten abzurunden. Die weiteren Ausführungen über die Tragweite mengentheoretischer Axiomatisierungen und über die Problematik des Mengenbegriffs orientieren sich im Licht der dargestellten Ergebnisse an den Leitgedanken des ersten Kapitels. Der Haupttext endet mit Kapitel XII in einer Gegenüberstellung der Zermelo-Fraenkelschen und der von Neumann-Bernays-Gödelschen Mengenlehre.

Das abschließende Kapitel XIII enthält Lösungshinweise für die Aufgaben. Die Hinweise sollen eine Hilfe sein, wenn man das Buch zur eigenständigen Erarbeitung des dargebotenen Stoffes nutzen möchte.

Ich danke Frau Heike Mildenberger für hilfreiche Hinweise und Herrn Andreas Rüdinger vom Springer-Verlag für die verständnisvolle Begleitung der vorliegenden Ausgabe.

Freiburg, im Mai 2021 Heinz-Dieter Ebbinghaus

Inhaltsverzeichnis

I

Einleitung

> Erst wollen wir den Standort gehörig erwägen, auf dem jeder von uns hält, damit wir umso redlicher Licht und Wetter teilen können.[1]

Ziel dieses Kapitels ist es, den Einstieg in die Mengenlehre vorzubereiten, den dabei eingeschlagenen Weg zu motivieren und den Blick für die Tragweite unseres Unterfangens zu schärfen. Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet der naive Mengenbegriff. Seine Analyse in §1 führt in Kapitel III zu den ersten Axiomen. Die folgenden Abschnitte setzen zunehmend auf ein bereits vorhandenes Vorverständnis. Da sie jedoch im technischen Sinn nicht Voraussetzung für die späteren Kapitel sind, kann ihre Lektüre an geeigneter Stelle – etwa in Befolgung entsprechender Verweise – nachgeholt werden.

§1 Der naive Mengenbegriff

Georg Cantor (1845–1918), der Schöpfer der Mengenlehre, eröffnet seine *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (*Cantor 1895/97*), die den Schlussstein seiner mengentheoretischen Arbeiten bilden, mit der folgenden Definition:

> Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Es handelt sich hier nicht um eine Definition, wie man sie aus der heutigen Mathematik kennt. Dazu sind die Begriffe „Zusammenfassung“, „Objekt unserer Anschauung“, usf. zu unbestimmt. Wir wollen in ihr eine Beschreibung

[1] Die Zitate unter den Kapitelüberschriften entstammen den Theologischen Streitschriften Gotthold Ephraim Lessings.

H.-D. Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8_1

sehen, von der wir uns anschaulich leiten lassen können. Einige Beispiele sollen uns auf den Weg bringen:

1.1 die Menge M_1 der ganzen Zahlen;

1.2 die Menge M_2 der reellen Zahlen;

1.3 die Menge M_3, die aus der Zahl 7 und aus der Zahl c der Primteiler von 510510 besteht.

In diesen Beispielen haben wir Dinge, nämlich Zahlen, zu einer Menge zusammengefasst, denen wir intuitiv die Eigenschaft absprechen, Mengen zu sein. Die Cantorsche Vorstellung schließt jedoch auch die Möglichkeit ein, *dass Mengen selbst wieder Elemente von Mengen sein können* wie im Beispiel

1.4 der Menge M_4, die aus der Menge M_2 und der Zahl 7 besteht.

Wir schreiben

$$x \in M,$$

wenn x Element der Menge M ist, und

$$x \notin M,$$

wenn x kein Element von M ist. So gilt z. B.

$$7 \in M_3, \;\; M_2 \in M_4, \;\; \pi \notin M_1.$$

In der Regel beschreibt man eine Menge, indem man ihre Elemente angibt. Das kann durch eine konkrete Aufzählung geschehen wie in 1.3 und 1.4, aber auch dadurch, dass man die Elemente durch eine gemeinsame *Eigenschaft* charakterisiert wie in 1.1 und 1.2. Man schreibt z. B.

$$M_3 \;=\; \{7, c\},$$

$$(*) \qquad M_1 \;=\; \{x \mid x \text{ ist ganze Zahl}\},$$

wobei in der Notierung für M_3 die Reihenfolge der Aufzählung keine Rolle spielt:

$$M_3 \;=\; \{c, 7\}.$$

Auch die Elemente von M_3 kann man durch eine Eigenschaft charakterisieren. Wir definieren dazu die Eigenschaft E_3 durch

$$E_3 \text{ treffe genau dann auf } x \text{ zu, wenn } x = 7 \text{ oder } x = c.$$

Dann ist $M_3 = \{x \mid E_3 \text{ trifft zu auf } x\}$. Ähnlich kann man bei jeder *endlichen* Menge, d. h. jeder Menge mit nur endlich vielen Elementen, verfahren. Die