Wir führen also folgende Rechnung durch:

$$\begin{aligned} x &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Eigenschaft der 0}}}{=} x+0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Axiom (A4) gibt es}\\ \text{ein } k\in K\text{, so dass } a+k=0}}{=} x+(a+k) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Assoziativgesetz (A1)}}}{=} (x+a)+k \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Voraussetzung}\\ \text{ist } x+a=y+a}}{=} (y+a)+k \\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Assoziativgesetz (A1)}}}{=} y+(a+k) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wahl von } k}}{=} y+0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Eigenschaft der 0}}}{=} y. \end{aligned}$$

■

**Satz 1.4. (Eindeutigkeit des additiven Inversen)** Es sei $K$ ein Körper, und es sei $x \in K$. Es existiert *genau* ein Element $y \in K$, so dass

$$x + y = 0.$$

**Beweis.** Es sei $x \in K$. Wegen Axiom (A4) wissen wir, dass es ein Element $y \in K$ mit $x + y = 0$ gibt. Wir müssen nun wiederum die Eindeutigkeit von $y$ zeigen. Es seien also $y, y' \in K$ mit $x + y = 0$ und $x + y' = 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $y = y'$. Es gilt:

$$y+x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kommutativgesetz (A2)}}}{=} x+y \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Voraussetzung}}}{=} 0 \underset{\uparrow}{=} x+y' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kommutativgesetz (A2)}}}{=} y'+x.$$

Es folgt nun aus der Kürzungsregel 1.3, dass $y = y'$. ■

**Definition.** Es sei $K$ ein Körper.

(1) Es sei $x \in K$. Nach Satz 1.4 existiert genau ein Element in $K$, welches zu $x$ addiert 0 ergibt. Wir bezeichnen dieses Element mit $-x$. Mit anderen Worten: $-x$ ist das einzige Element in $K$ mit $x + (-x) = 0$.
(2) Für $x, y \in K$ schreiben wir $x - y := x + (-y)$.

**Satz 1.5.** Es sei $K$ ein Körper. Es gelten folgende Aussagen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | | $-0$ | $=$ | $0.$ |
| (2) | Für alle $x \in K$ gilt | $-(-x)$ | $=$ | $x.$ |
| (3) | Für alle $x, y \in K$ gilt | $-(x+y)$ | $=$ | $-x-y.$ |

**Beweis.**

(1) Zur Erinnerung: Für $a$ und $b$ in $K$ gilt $-a = b$ genau dann, wenn $a + b = 0$. Wenn wir also zeigen wollen, dass $-0 = 0$, dann müssen wir zeigen, dass $0 + 0 = 0$. Dies folgt jedoch sofort aus der Eigenschaft der 0.
(2) Es sei $x \in K$. Wir müssen zeigen, dass $-(-x) = x$. Wie in (1) müssen wir also zeigen, dass $(-x) + x = 0$. In der Tat gilt: $$(-x)+x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kommutativgesetz (A2)}}}{=} x+(-x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition von } -x}}{=} 0.$$
(3) Diese Aussage wird in Übungsaufgabe 1.6 behandelt. ■

**1.4. Folgerungen aus den Axiomen der Multiplikation.** In diesem Abschnitt behandeln wir nun die Axiome der Multiplikation. Die Axiome der Multiplikation sind ganz ähnlich zu den Axiomen der Addition. Beispielsweise gelten sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz und die Existenz eines neutralen Elements. Das Multiplikationsaxiom (M4) hingegen ist nicht mehr ganz analog zum Axiom (A4): Bei der Multiplikation fordern wir die Existenz eines inversen Elements für alle Elemente *außer* der Null $0 \in K$. Die Analogie zwischen Addition und Multiplikation wird dann durch das Distributivgesetz völlig aufgebrochen.

**Satz 1.6. (Eindeutigkeit des neutralen Elements der Multiplikation)** Es sei $K$ ein Körper. Es existiert genau ein Element $k \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$x \cdot k \;=\; x.$$

**Beweis.** Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis von Satz 1.2. Man muss nur die Axiome der Addition (A2) und (A3) durch die entsprechenden Axiome der Multiplikation (M2) und (M3) ersetzen. ∎

**Definition.** Es sei $K$ ein Körper. Wir nennen das durch den obigen Satz eindeutig bestimmte Element die Eins des Körpers, welche wir mit „1" bezeichnen.

**Satz 1.7. (Kürzungsregel der Multiplikation)** Es sei $K$ ein Körper und zudem seien $x, y \in K$. Wenn es ein $a \in K \setminus \{0\}$ gibt, so dass $x \cdot a = y \cdot a$, dann gilt $x = y$.

**Beweis.** Der Beweis ist ganz analog zum Beweis von Satz 1.3, wir müssen nur die Additionsaxiome (A1) und (A4) durch die Multiplikationsaxiome (M1) und (M4) ersetzen. ∎

**Satz 1.8. (Eindeutigkeit des multiplikativ Inversen)** Es sei $K$ ein Körper, und es sei $x \in K$ mit $x \neq 0$. Es existiert *genau* ein Element $y \in K$, so dass

$$x \cdot y = 1.$$

**Beweis.** Der Satz wird ähnlich bewiesen wie Satz 1.4. ∎

**Definition.** Es sei $K$ ein Körper. Für $x \neq 0$ in $K$ bezeichnen wir mit $x^{-1}$ das durch Satz 1.8 eindeutig bestimmte Element, welches $x \cdot x^{-1} = 1$ erfüllt.[4] Aus dem Kommutativgesetz (M2) folgt dann auch, dass $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.

**Satz 1.9.** Es sei $K$ ein Körper. Es gelten folgende Aussagen:

(1) $1^{-1} = 1.$

(2) Für alle $x \in K \setminus \{0\}$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x.$

(3) Für alle $x, y \in K \setminus \{0\}$ gilt $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}.$

**Beweis.** Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis von Satz 1.5. ∎

**Satz 1.10.** Es sei $K$ ein Körper. Für alle $x \in K$ gilt $x \cdot 0 = 0$.

**Beweis.**

Obwohl wir den Satz natürlich so erwarten, ist er doch etwas überraschend: Die 0 wurde durch die Axiome der Addition definiert. Der Satz macht aber eine Aussage über das multiplikative Verhalten der 0. Das einzige Axiom, welches die Addition mit der Multiplikation verbindet, ist das Distributivgesetz. Wir werden dieses dementsprechend im Beweis verwenden.

---

[4] Hierbei ist „$x^{-1}$" im Moment nur eine Notation. Wir haben nicht eingeführt, was im Allgemeinen „$x$ hoch irgendetwas" heißen soll.

Für $x \in K$ gilt: $$0 + x \cdot 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } 0}}{=} x \cdot 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } 0}}{=} x \cdot (0+0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Distributivgesetz (D)}}}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Vergleichen wir nun die linke und die rechte Seite, so sehen wir, dass nun aus der Kürzungsregel 1.3 folgt, dass $0 = x \cdot 0$. ■

**Satz 1.11.** Es sei $K$ ein Körper, und es seien $x, y \in K$. Dann gilt:
$$x \cdot y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ oder}^5 \ y = 0.$$

**Beweis.** Es seien also $x, y \in K$ mit $x \cdot y = 0$. Wenn sowohl $x = 0$ als auch $y = 0$, dann sind wir fertig. Wenn $x \neq 0$, dann gilt
$$y = 1 \cdot y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } x \neq 0}}{=} (x^{-1} \cdot x) \cdot y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Assoziativität}}}{=} x^{-1} \cdot (x \cdot y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Voraussetzung}}}{=} x^{-1} \cdot 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 1.10}}}{=} 0.$$
Der Fall $y = 0$ wird ganz analog behandelt. ■

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz, in dem wiederum sowohl die Addition als auch die Multiplikation verwendet werden:

**Satz 1.12.** Es sei $K$ ein Körper. Für alle $x, y \in K$ gilt

(1) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,

(2) $(-1) \cdot y = -y$,

(3) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

**Beweis.** Der Beweis der Aussagen (1) und (3) erfolgt in Übungsaufgabe 1.7. Aussage (2) folgt leicht mit $x = 1$ aus Aussage (1). ■

### 1.5. Summen- und Produktnotation.
Wir führen zuerst folgende Notation ein:

**Definition.** Es sei $K$ ein Körper.

(1) Für $a_1, \dots, a_s \in K$ definieren wir
$$a_1 + a_2 + \dots + a_s := (\dots((a_1 + a_2) + a_3) + \dots) + a_s.$$
Aus dem Assoziativgesetz (A1) und dem Kommutativgesetz (A2) folgt, dass der Ausdruck $a_1 + \dots + a_s$ nicht von der Reihenfolge der Klammerung und der Reihenfolge der Summanden abhängt. Wir setzen zudem
$$\sum_{i=1}^{s} a_i := a_1 + \dots + a_s \quad \text{und für } s = 0 \text{ definieren wir die „leere Sume"} \sum_{i=1}^{0} a_i := 0.$$

(2) Für $x, y \in K$ schreiben wir oft $$xy := x \cdot y.$$
Wenn $y \neq 0$, dann schreiben wir $$\frac{x}{y} := x/y := x \cdot y^{-1}.$$
Für $a_1, \dots, a_s \in K$ definieren wir
$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_s := (\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \ldots) \cdot a_s.$$

---

[5]Es seien $A$ und $B$ zwei mathematische Aussagen. Wir arbeiten mit folgenden Formulierungen:

(1) Die Formulierung „es gilt $A$ oder $B$" bedeutet: Es gilt mindestens eine der beiden Aussagen, es können aber auch $A$ und $B$ gleichzeitig gelten.

(2) Die Formulierung „es gilt entweder $A$ oder $B$" bedeutet: Es gilt genau eine der beiden Aussagen.

Ganz analog zu oben folgt aus dem Assoziativgesetz (M1) und dem Kommutativgesetz (M2), dass $a_1 \cdot \ldots \cdot a_s$ nicht von der Reihenfolge der Klammerung und der Reihenfolge der Faktoren abhängt. Wir schreiben zudem

$$\prod_{i=1}^{s} a_i \;:=\; a_1 \cdot \ldots \cdot a_s \quad \text{und für } s=0 \text{ definieren wir das „leere Produkt"} \prod_{i=1}^{0} a_i := 1.$$

**Beispiel.**

(a) Es gilt: $$\sum_{k=1}^{4} k^2 \;=\; 1+2^2+3^2+4^2 \;=\; 30 \quad \text{und} \quad \prod_{m=1}^{3}(2m+1) \;=\; 3\cdot 5\cdot 7 \;=\; 105.$$

(b) Manchmal verwenden wir auch „Doppelsummen": Wenn $K$ ein Körper ist, und wenn $\{x_{ij}\}_{i=1,\ldots,r,j=1,\ldots,s}$ Elemente von $K$ sind, dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} x_{ij} &= \overbrace{\sum_{j=1}^{s} x_{1j}}^{\text{Summand für } i=1} + \overbrace{\sum_{j=1}^{s} x_{2j}}^{\text{Summand für } i=2} + \ldots + \overbrace{\sum_{j=1}^{s} x_{rj}}^{\text{Summand für } i=r} \\ &= (x_{11}+\cdots+x_{1s})+(x_{21}+\cdots+x_{2s})+\cdots+(x_{r1}+\cdots+x_{rs}).\end{aligned}$$

Folgender Satz wird immer wieder verwendet, ohne explizit erwähnt zu werden:

**Satz 1.13.** Es sei $K$ ein Körper. Für $a_1,\ldots,a_r \in K$ und $b_1,\ldots,b_s \in K$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{s} b_j\right) \;=\; \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_i \cdot b_j.$$

**Beweis.** Die Gleichheit folgt aus mehrfacher Anwendung des Distributivgesetzes. ∎

**Definition.** Es sei $K$ ein Körper. Für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x^n \;:=\; \underbrace{x\cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}.$$

Zudem definieren wir $x^0 := 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ und $x \neq 0$ definieren wir

$$x^{-n} \;:=\; (x^n)^{-1}.$$

Wir bezeichnen $x^n$ als $x$ hoch $n$ oder auch als $n$-te Potenz von $x$.

Der folgende Satz fasst einige elementare Eigenschaften von Potenzen zusammen:

**Satz 1.14. (Potenzregeln)** Es sei $K$ ein Körper, es seien $x, y \in K$ mit $x, y \neq 0$, und es seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{array}{lrcl} (1) & x^m \cdot x^n &=& x^{m+n} \\ (2) & (x^n)^m &=& x^{m\cdot n} \\ (3) & x^n \cdot y^n &=& (x\cdot y)^n. \end{array}$$

**Beweisskizze.** Die beiden ersten Aussagen folgen aus dem Assoziativgesetz (M1). Die dritte Aussage benötigt das Assoziativgesetz (M1) und auch das Kommutativgesetz (M2). ∎

Wir haben in den letzten Kapiteln gesehen, dass für Körper die „üblichen" Rechen- und Umformungsregeln gelten. Im Folgenden werden wir die verwendeten Körperaxiome nicht mehr explizit aufführen und wir werden die obigen Sätze nicht mehr explizit zitieren. Zudem verwenden wir ab sofort die üblichen Rechenregeln, ohne diese im Einzelnen herzuleiten.

**Bemerkung.** Zum Abschluss der Diskussion der Körperaxiome wollen wir noch kurz der Frage nachgehen, warum die Axiome so formuliert sind, wie sie sind. Beispielsweise hätten wir noch folgendes Axiom formulieren können

(A5) Für alle $x, y, z \in K$ gilt: $x + (y + z) = y + (x + z)$.

Man kann sich aber leicht davon überzeugen, dass (A5) schon aus dem Assoziativgesetz (A1) und dem Kommutativgesetz (A2) folgt. Das Ziel ist, einen Körper über möglichst wenige Axiome zu charakterisieren, und dann ist (A5) überflüssig, nachdem es schon aus (A1) und (A2) folgt. Jetzt stellt sich die Frage, ob man nicht vielleicht eines der anderen Axiome weglassen könnte. Wir haben gesehen, dass $\mathbb{Z}$ alle Axiome bis auf (M4) erfüllt. Nachdem (M4) jedoch nicht für $\mathbb{Z}$ gilt, kann (M4) nicht aus den anderen Axiomen folgen. Wir können Axiom (M4) also nicht weglassen.

Es ist eine amüsante Aufgabe, sich für jedes Axiom ein Beispiel zu überlegen, für welches alle anderen Axiome gelten, aber das gewählte Axiom nicht. Beispielsweise gibt es auf $\mathbb{R}^4$ eine Multiplikation, welche zusammen mit der üblichen Addition auf $\mathbb{R}^4$ alle Körperaxiome bis auf (M2) erfüllt. Diese Struktur nennt man die Quaternionenmultiplikation.

**1.6. Angeordnete Körper.** Wir wollen uns im Folgenden an die Eigenschaften der rationalen und reellen Zahlen herantasten. Die rationalen und reellen Zahlen, wie wir sie aus der Schule kennen, besitzen neben der Addition und Multiplikation auch noch eine weitere Struktur, nämlich man kann zwei reelle Zahlen $x, y$ „vergleichen": Wir können davon reden, dass $x$ „größer" oder „kleiner" als $y$ ist. Dies führt uns zu folgender Definition:

**Definition.** Ein angeordneter Körper ist ein Körper $K$ zusammen mit einer Relation „>", welche folgende Ordnungsaxiome erfüllt:

(O1) Für alle $x, y \in K$ gilt *genau eine* der folgenden drei Aussagen:
$$x > y \quad \text{oder} \quad y > x \quad \text{oder} \quad x = y.$$
(O2) Für alle $x, y, z \in K$ gilt: $x > y$ und $y > z \implies x > z$ (Transitivität).
(O3) Für alle $x, y, a \in K$ gilt: $x > y \implies x + a > y + a$.
(O4) Für alle $x, y, a \in K$ gilt: $x > y$ und $a > 0 \implies x \cdot a > y \cdot a$.

**Beispiel.**

(1) Es sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Mit der üblichen Bedeutung von „>" ist $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper.

(2) Hier ist ein etwas komplizierteres Beispiel eines angeordneten Körpers. Wie in Kapitel 1.2 sei $K$ der Körper der rationalen Funktion, d.h.
$$K = \text{Menge der rationalen Funktionen} = \left\{x^3, \frac{x}{x+1}, -2 + 7x^2, \frac{1}{x^2 + 7x^3}, \ldots\right\}.$$
Für $f, g \in K$ definieren wir[6]
$$f > g \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Es existiert ein } \epsilon > 0, \text{ so dass } f(x) > g(x) \text{ für alle } 0 < x < \epsilon.$$
Beispielsweise gilt $\frac{x}{x+1} > x^3$, denn diese Ungleichheit gilt für alle $0 < x < \frac{1}{2}$. Man kann nun zeigen, dass $K$ mit dieser Ordnung $>$ in der Tat die Ordnungsaxiome (O1) bis (O4) erfüllt. Wir werden dieses Beispiel nicht weiter verfolgen.

(3) Es stellt sich nun die Frage, ob man nicht auch auf anderen Körpern eine Ordnung „>" einführen kann, welche die Axiome (O1) bis (O4) erfüllt. Beispielsweise stellt sich die Frage, ob dies für den Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ möglich ist, welchen wir auf Seite 5 eingeführt haben. Wir werden diese Frage auf Seite 13 beantworten.

[6]Die Notation $:\Longleftrightarrow$ bedeutet hierbei, dass die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Mit anderen Worten: Wir schreiben $f > g$ genau dann, wenn die Aussage auf der rechten Seite gilt.