1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x+1) \cdot e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+1) \cdot e^x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 = 0 \qquad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & x = -1 \end{aligned}$$

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle $\ln 2$ und bestimmen Sie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

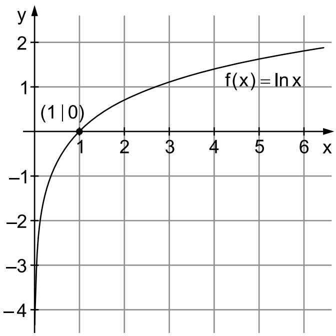
$$f(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2}}{1+e^{\ln 2}} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = „\frac{1}{1+0^+}“ = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = „\frac{0^+}{0^++1}“ = 0^+$$

2.5 Natürliche Logarithmusfunktion (nur LK)

- Die natürliche Logarithmusfunktion lautet $f(x) = \ln x$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$
  Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
- Die ln-Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$



Bestimmen Sie das Verhalten von $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$ an den Rändern des Definitionsbereichs.

Die ln-Funktion ist nur für positive Argumente definiert:

$$\frac{1}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f =]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = „\ln\left(\frac{1}{1^+ - 1}\right)" = „\ln\left(\frac{1}{0^+}\right)" = „\ln(+\infty)" = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = „\ln\left(\frac{1}{+\infty - 1}\right)" = „\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)" = „\ln(0^+)" = -\infty$$

2.6 Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall

Exponentielle Wachstumsfunktion: $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot x}$
Exponentielle Zerfallsfunktion: $N(x) = N_0 \cdot e^{-k \cdot x}$
Bedeutung der Parameter bzw. Werte:
N_0: Startwert für $x = 0$; $N_0 > 0$
x: Zeit ab einem bestimmten Startpunkt; $x \geq 0$
k: Wachstums- bzw. Zerfallskonstante; $k > 0$
N(x): Wert nach der Zeit x

Eine Tomatenstaude hat zum Zeitpunkt des Auspflanzens eine Höhe von 8 cm. Nach 30 Tagen ist sie schon 14 cm hoch.
Das Wachstum der Staude lässt sich in den ersten zwei Monaten näherungsweise durch eine Exponentialfunktion mit einem Term der Form $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot x}$ (x in Tagen, N(x) in Zentimetern) beschreiben.
Bestimmen Sie N_0 und k.

Informationen aus dem Text:
$N(0) = 8, \; N(30) = 14$

Berechnung von N_0:
$N(0) = N_0 \cdot e^{k \cdot 0} = N_0 \quad \Rightarrow \quad N_0 = 8$

Berechnung von k:
$N(30) = 8 \cdot e^{k \cdot 30}$

$$\Rightarrow \quad 8 \cdot e^{k \cdot 30} = 14$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{k \cdot 30} = \frac{14}{8} \quad \Big| \ln$$
$$\Leftrightarrow \quad k \cdot 30 = \ln\left(\frac{14}{8}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{14}{8}\right) \approx 0{,}0187$$

Die Wachstumsfunktion lautet: $N(x) = 8 \cdot e^{0{,}0187 \cdot x}$

3 Ableitung

3.1 Die Ableitung

Die Ableitung einer Funktion entspricht in jedem Punkt der Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion und wird deshalb als Grenzwert der Sekantensteigung bestimmt.

Der **Differenzenquotient** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ gibt die Steigung einer Sekante durch den Punkt $P(x_0|f(x_0))$ und einen weiteren Punkt des Graphen der Funktion f(x) an.
Der Grenzwert des Differenzenquotienten bei Annäherung der beiden Punkte heißt **Differenzialquotient** und gibt die Steigung der Tangente im Punkt P an den Graphen von f(x) bzw. die Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 an:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{(momentane Änderungsrate)}$$

Eine Funktion f heißt ableitbar bzw. differenzierbar an der Stelle x_0, wenn dieser Grenzwert existiert und nicht unendlich ist.

Ableitungen der Grundfunktionen

Es gilt die **Potenzregel**:

$$f(x) = x^r \text{ mit } r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der Funktion.

1. $f(x) = x^4$

   $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4 \cdot x^3$

2. $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

   $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

   $h'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Weitere Grundfunktionen:

$f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$ (nur LK)

Ableitungsregeln

Zum Ableiten komplexerer Funktionen benötigt man weitere Regeln.

Faktorregel

$f(x) = a \cdot u(x)$ mit $a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot u'(x)$

Summenregel

$f(x) = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Produktregel

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel (nur LK)

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Kettenregel

$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Faktorregel

$f(x) = 5 \cdot \cos x$

$f'(x) = 5 \cdot (-\sin x) = -5 \cdot \sin x$

Summenregel

$f(x) = \ln x + \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Produktregel

$f(x) = x \cdot e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$

Quotientenregel (nur LK)

$f(x) = \frac{4-x^2}{2x-1}$

$f'(x) = \frac{-2x \cdot (2x-1) - (4-x^2) \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{-4x^2 + 2x - 8 + 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 8}{(2x-1)^2}$

Kettenregel

$f(x) = \sin(x^2 - 3x)$

$f'(x) = \cos(x^2 - 3x) \cdot (2x - 3)$

3.2 Tangentengleichung

Die Ableitung $f'(x_0)$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ an. Die Gleichung der Tangente in diesem Punkt lautet damit:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente im Punkt $P(2 | f(2))$ an den Graphen der Funktion $f(x) = 3x^2 - 5$.

$f(2) = 3 \cdot 4 - 5 = 7 \quad \Rightarrow \quad P(2 | 7)$

$f'(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 12$

Gleichung der Tangente:

$y = f'(2) \cdot (x-2) + f(2) = 12 \cdot (x-2) + 7 = 12x - 17$