

Analysis

1 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

1.1 Potenzfunktionen

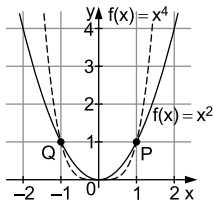
Potenzfunktionen sind Funktionen der Form: $f: x \mapsto x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$
Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

- Exponent positiv: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R}$
Die Graphen sind **Parabeln**.

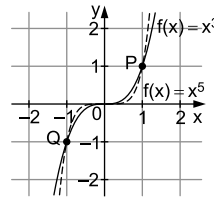
- Exponent negativ: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Die Graphen sind **Hyperbeln**.

Graphenverläufe

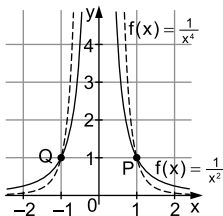
Parabeln: n gerade; Werte in \mathbb{R}_+



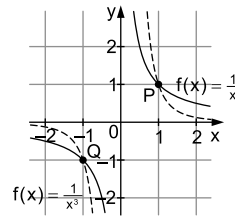
n ungerade; Werte in \mathbb{R}



Hyperbeln: n gerade; Werte in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$



n ungerade; Werte in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

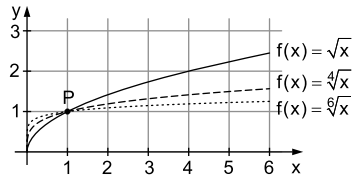


Wurzelfunktion

Ist der Exponent r ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:

$f: x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $x \in \mathbb{R}_+$ (n -te Wurzelfunktion)

1. G_f verläuft durch $P(1 | 1)$.
2. Einzige Nullstelle: $x=0$
3. Werte liegen in \mathbb{R}_+
4. Je größer n , desto
 - flacher verläuft G_f für $x > 1$.
 - steiler nähert sich G_f dem Koordinatenursprung.



1.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form:

$$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; \quad x \in \mathbb{R}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

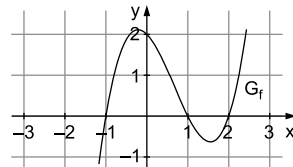
Die Werte $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 1.6).



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

\Rightarrow Nullstellen bei $x=2$,
 $x=-1$ und $x=1$

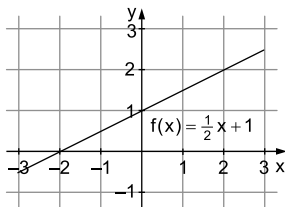


Spezialfälle

Lineare Funktion:

$$f(x) = mx + t \quad (\text{Grad } 1)$$

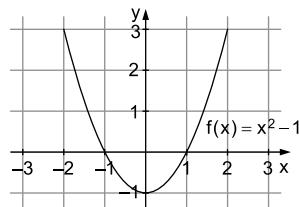
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{Grad } 2)$$

Graph ist eine Parabel.



1.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)

Trigonometrische Funktionen bieten sich bei der Beschreibung und Modellierung periodischer Vorgänge an.

Unter der allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion versteht man eine Funktion der Form:

$f: x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ bzw. $f: x \mapsto a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$
für $x \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0, b \neq 0$

Werte liegen im Bereich $[-a + d; a + d]$ bzw. $[a + d; -a + d]$.

Bedeutung der Parameter (vgl. auch Abschnitt 1.5)

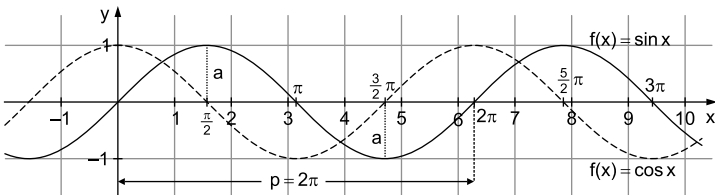
a: bestimmt die Amplitude ($\hat{=}$ „maximaler Ausschlag nach oben bzw. unten um $|a|$ “)

b: bestimmt die Periode ($\hat{=}$ „eine Schwingung“), $p = \frac{2\pi}{|b|}$

c: Verschiebung längs x-Achse

d: Verschiebung längs y-Achse

Grundfunktionen $\sin x$ und $\cos x$



$a = 1$; $p = 2\pi$; Werte liegen im Bereich $[-1; 1]$.

Nullstellen

Der Abstand zwischen zwei Nullstellen einer Sinus- bzw. Kosinusfunktion entspricht einer halben Periodenlänge und es gilt:

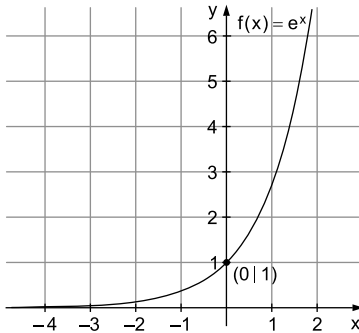
$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots)$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\dots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots)$$

1.4 Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion lautet $f: x \mapsto e^x; x \in \mathbb{R}$.
- Es gilt: $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Werte liegen in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$)
- Die e -Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (y=0 \text{ ist waagrechte Asymptote}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



Bei der Untersuchung von Exponentialfunktionen (Bestimmung von Nullstellen etc.) müssen oft Exponentialgleichungen gelöst werden; dabei spielt die Umkehrung der e -Funktion (der natürliche Logarithmus $\ln x$) eine wichtige Rolle, vgl. Kapitel „Gleichungen“, Abschnitt 1.2.



1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x+1) \cdot e^x; x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

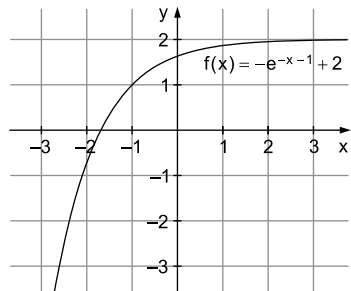
$$\Leftrightarrow x = -1$$

2. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = -e^{-x-1} + 2; x \in \mathbb{R}$.

Ausgehend vom Graphen oben (vgl. Abschnitt 1.5):

- Verschiebung um +1 in x -Richtung (nach rechts)
- Spiegelung an der y -Achse
- Spiegelung an der x -Achse
- Verschiebung um +2 in y -Richtung (nach oben)
- Waagrechte Asymptote $y=2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x-1} + 2) = 2$$



Exponentialfunktionen finden oft Anwendung bei der Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen.

Exponentielle Wachstumsfunktion: $B(t) = B_0 \cdot e^{k \cdot t}$

Exponentielle Zerfallsfunktion: $B(t) = B_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

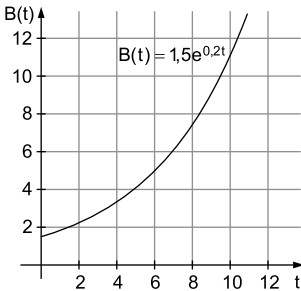
B_0 : Startwert für $t=0$; $B_0 > 0$

t : Zeit ab einem bestimmten Startpunkt; $t \geq 0$

k : Wachstums- bzw. Zerfallskonstante; $k > 0$

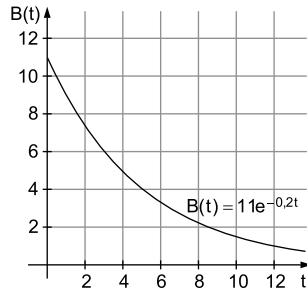
$B(t)$: Wert nach der Zeit t

Exponentielles Wachstum



Exponentieller Zerfall

(Asymptote $y=0$ für $t \rightarrow \infty$)



Eine Tomatenstaude hat zum Zeitpunkt des Auspflanzens eine Höhe von 8 cm. Nach 30 Tagen ist sie schon 14 cm hoch. Das Wachstum der Staude lässt sich in den ersten zwei Monaten näherungsweise durch eine Exponentialfunktion mit einem Term der Form $B(t) = B_0 \cdot e^{k \cdot t}$ (t in Tagen, $B(t)$ in Zentimetern) beschreiben. Bestimmen Sie k .

Es gilt: $B_0 = B(0) = 8$; $B(30) = 14$

Berechnung von k :

$$B(30) = 8 \cdot e^{k \cdot 30} = 14$$

$$e^{k \cdot 30} = \frac{14}{8} \quad | \ln$$

$$k \cdot 30 = \ln\left(\frac{14}{8}\right)$$

$$k = \frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{14}{8}\right) \approx 0,0187$$

Die Wachstumsfunktion lautet: $B(t) = 8 \cdot e^{0,0187 \cdot t}$