Bei einer **Parallelverschiebung** $P \xmapsto{\vec{v}} P'$ wird der Punkt P durch den Vektor $\vec{v}$ auf den Bildpunkt P' abgebildet. Die Berechnung der Bildpunktkoordinaten kann über die **Vektoraddition** oder den **Vektorvergleich**, also durch Gleichsetzen von Vektoren, erfolgen.

Parallelverschiebung $P \xmapsto{\vec{v}} P'$:

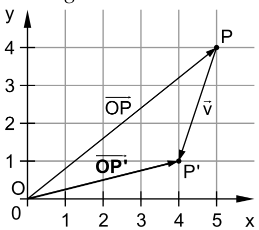
Vorgehensweise 1:
- Addition von Ortspfeil $\overrightarrow{OP}$ und $\vec{v}$
- Am Ergebnispfeil $\overrightarrow{OP'}$ die Koordinaten von P' ablesen

Vorgehensweise 2:
- Gleichsetzen von $\overrightarrow{PP'}$ und $\vec{v}$ unter Verwendung von $P'(x\,|\,y)$
- x- und y-Koordinaten zeilenweise vergleichen und nach x und y auflösen
- Koordinaten von P' angeben

Der Punkt $P(5\,|\,4)$ wird mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ parallel verschoben.

Bestimme die Koordinaten des Bildpunkts P'.

Lösung:



Die Koordinaten von P' ergeben sich aus dem Ortsvektor $\overrightarrow{OP'}$, der sich mithilfe von $\overrightarrow{OP}$ und $\vec{v}$ bestimmen lässt.
Alternativ können auch die Vektoren $\overrightarrow{PP'}$ und $\vec{v}$ verglichen werden, die die gleichen Koordinaten haben.

Vorgehensweise 1:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \oplus \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also: $P'(4\,|\,1)$

Vorgehensweise 2:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$$ Vektorvergleich

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$ Spitze minus Fuß mit $P'(x\,|\,y)$

$$\Leftrightarrow x-5=-1 \quad \wedge \quad y-4=-3$$
$$\Leftrightarrow x=4 \quad \wedge \quad y=1$$
Koordinaten zeilenweise vergleichen

also: $P'(4\,|\,1)$

Der Mittelpunkt einer Strecke [AB] hat folgende Koordinaten:

$$M_{[AB]}\left(\frac{x_A + x_B}{2} \,\middle|\, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Berechnung des Mittelpunkts M einer Strecke [AB]

Vorgehensweise 1:

- Formel verwenden:

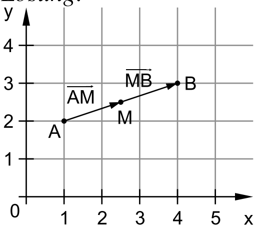
$$M_{[AB]}\left(\frac{x_A + x_B}{2} \,\middle|\, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Vorgehensweise 2:

- Gleichsetzen von $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MB}$ mit $M(x\,|\,y)$
- x- und y-Koordinaten zeilenweise vergleichen und nach x und y auflösen
- Koordinaten von M angeben

Berechne den Mittelpunkt der Strecke [AB] mit $A(1\,|\,2)$ und $B(4\,|\,3)$.

Lösung:



Die Koordinaten von M ergeben sich mithilfe der Formel.
Alternativ können auch die Vektoren $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MB}$ verglichen werden, die die gleichen Koordinaten haben.

Vorgehensweise 1:

$$M_{[AB]}\left(\frac{x_A + x_B}{2} \,\middle|\, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$M_{[AB]}\left(\frac{1+4}{2} \,\middle|\, \frac{2+3}{2}\right)$$

$$M_{[AB]}(2{,}5\,|\,2{,}5)$$

Vorgehensweise 2:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \quad \text{Vektorvergleich}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-x \\ 3-y \end{pmatrix} \quad \text{Spitze minus Fuß mit } M(x\,|\,y)$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 4-x \quad \wedge \quad y-2 = 3-y$$

$$\Leftrightarrow 2x = 5 \quad \wedge \quad 2y = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 2{,}5 \quad \wedge \quad y = 2{,}5$$

also: $M(2{,}5\,|\,2{,}5)$

Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme

1 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Eine Gleichung/Ungleichung heißt **linear**, wenn die höchste vorkommende Potenz der Variablen (meist x) den Wert 1 hat ($x^1 = x$).
Zur Lösung einer Gleichung/Ungleichung werden auf beiden Seiten zugleich gleichartige Rechenoperationen durchgeführt, diese heißen **Äquivalenzumformungen**.

Bei **Ungleichungen** gilt zusätzlich das **Inversionsgesetz**:
Bei beidseitiger Multiplikation/Division mit derselben **negativen** Zahl, muss man das **Ungleichheitszeichen umkehren**.

Vorgehensweise beim Lösen linearer Gleichungen/Ungleichungen:

- *Falls vorhanden:* Auflösen von Klammern; Beseitigen von Nennern
- Gleichung durch Strich- und Punkt-**Äquivalenzumformungen** so umformen, dass die gesuchte Variable (meist x) alleine gestellt wird (Bei Ungleichungen ist das Inversionsgesetz zu beachten.)
- Lösungsmenge unter Berücksichtigung der Grundmenge angeben

a)
$$\begin{array}{rll} 4(2x+1)-3x = 6+7x & \mathbb{G}=\mathbb{R} & \text{Links- und Rechtsterm vereinfachen} \\ 8x+4-3x = 6+7x & \big|-4 & \text{Mithilfe von Strich- und Punktumformungen nach x auflösen} \\ 5x = 2+7x & \big|-7x & \\ -2x = 2 & \big|:(-2) & \\ x = -1 & & \\ \mathbb{L}=\{-1\} & & \text{Lösungsmenge angeben} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rlll} \frac{x}{2} > -3+\frac{3}{5}x & \big|\cdot 10 & \mathbb{G}=\mathbb{R} & \text{Nenner beseitigen} \\ 5x > -30+6x & \big|-6x & & \text{Nach x auflösen} \\ -x > -30 & \big|\cdot(-1) & & \text{Inversionsgesetz beachten!} \\ x < 30 & & & \\ \mathbb{L}=\{x \mid x<30\} & & & \text{Lösungsmenge angeben} \end{array}$$

Fällt beim Vereinfachen einer Gleichung/Ungleichung die Variable weg, ist die Lösungsmenge entweder die leere Menge $\emptyset$ oder die Grundmenge $\mathbb{G}$.

a) $1{,}5x - (-3{,}5x - 7) = \frac{25}{5}x - 7 \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

$$5x + 7 = 5x - 7 \qquad | -5x$$

$$7 = -7$$

$\mathbb{L} = \emptyset$

Keine Belegung für x führt zu einer wahren Aussage. Die Lösungsmenge ist also leer.

b) $4x + 2 > 4x - 7 \qquad | -4x \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

$$2 > -7$$

$\mathbb{L} = \mathbb{R}$

Alle Belegungen für x führen zu einer wahren Aussage. Die Lösungsmenge ist also gleich der Grundmenge.

2 Bruchgleichungen

Eine **Bruchgleichung** ist eine Gleichung, bei der mindestens eine Variable im Nenner eines Bruchs vorkommt. Bruchgleichungen mit der Variablen x sind nur für die x-Werte aus der Grundmenge $\mathbb{G}$ definiert, für die kein Nenner null ist. Die Menge dieser zulässigen x ist zusammengefasst in der **Definitionsmenge $\mathbb{D}(x)$** der Bruchgleichung.

Vorgehensweise beim Lösen linearer Bruchgleichungen:

- Bestimmung der Definitionsmenge $\mathbb{D}(x)$
- Umformung durch Überkreuz-Multiplikation
- *Falls vorhanden:* Auflösen von Klammern
- Gleichung durch Strich- und Punkt-**Äquivalenzumformungen** so umformen, dass die gesuchte Variable (meist x) alleine gestellt wird
- Lösungsmenge unter Berücksichtigung der Definitionsmenge angeben

Bestimme die Definitions- und die Lösungsmenge der Gleichung.

$$\frac{3}{x-2}=\frac{4}{4x-8} \qquad \mathbb{G}=\mathbb{R}$$

Lösung:

Bestimmung der Definitionsmenge:

Nenner 1: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

Nenner 2: $4x-8=0 \Rightarrow x=2$

Für $x=2$ hätten beide Nenner den Wert 0 und die Brüche wären nicht definiert.

$\mathbb{D}(x)=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Bestimmung der Lösungsmenge:

$$\frac{3}{x-2}=\frac{4}{4x-8}$$

Überkreuz multiplizieren

$$\Leftrightarrow \quad 3\cdot(4x-8)=4\cdot(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 12x-24=4x-8 \quad \big|-4x+24$$

Strichumformungen

$$\Leftrightarrow \quad 8x=16 \quad \big|:8$$

Punktumformung

$$\Leftrightarrow \quad x=2$$

$\mathbb{L}=\emptyset$

$x=2$ ist nicht in der Definitionsmenge enthalten!