A 17
Differentialrechnung mehrerer Variabler

A17.1 Partielle Ableitungen

Aufgabe A17.1.1
Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

a) $f(x, y) = 2x + 3y$, b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

c) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 y^4)$, d) $f(x, y) = 8 - 3x \sin y$.

Aufgabe A17.1.2
a) Für die durch folgende Funktionswertzuweisung definierten Funktionen

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

gebe man den maximalen Definitionsbereich D an und berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.
b) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x^0, y^0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x^0, y^0) + f_x(x^0, y^0)(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)(y - y^0) .$$

Man bestimme jeweils die Tangentialebene für f und g aus a) im Punkt $(x^0, y^0) = (-1, 2)$.

Aufgabe A17.1.3
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2x + e^{x+2y}$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.
b) Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1/2)$.
c) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(0, 0)$ läuft.
d) Man berechne den Winkel α zwischen grad $f(0, 0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(0, 0)$.

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2, Aufgaben und Lösungen, 5. Aufl.
Rainer Ansorge, Hans Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar.

Aufgabe A17.1.4
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$.

a) Man bestimme die Höhenlinie durch den Punkt $(1, 1)$.
b) Man berechne $\operatorname{grad} f$ im Punkt $(1, 1)$.
c) Man zeige, dass $\operatorname{grad} f(1, 1)$ senkrecht auf dem Tangentialvektor der Höhenlinie im Punkt $(1, 1)$ steht.
d) Man zeichne a)–c).

Aufgabe A17.1.5
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y\sqrt{2x^2 + y^2}$.

a) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f.
b) Man überprüfe, ob f eine C^1-Funktion ist.
c) Man berechne f_{xy} und f_{yx} und bestimme den Definitionsbereich dieser Ableitungen.

Aufgabe A17.1.6
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2 + y^6}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig bzw. stetig ergänzbar ist.
b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-0{,}5, 0{,}5] \times [-1{,}1]$.
c) Man berechne alle Richtungsableitungen von f
d) und überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe A17.1.7
a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2}$.
   i) Man zeichne die Funktion.
   ii) Man weise die Stetigkeit von f in ganz $\mathbb{R}^2$ nach.
   iii) Man berechne die partiellen Ableitungen von f in ganz $\mathbb{R}^2$, sofern dies möglich ist.
b) Man berechne die Gradienten der folgenden Abbildungen
   i) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \sin(x^2 - y^3)$,
   ii) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y, z) = \frac{xy}{z^4+1}$.

Klausuraufgabe A17.1.8
a) Man berechne die Tangentialebene der durch $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ gegebenen Funktion im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
b) Für die durch $f(x, y) = \sin(\pi x^2 + \pi y)$ gegebene Funktion berechne man im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ den Anstieg in x- und y-Richtung und die Tangentialebene.

Aufgabe A17.1.9
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt positiv homogen vom Grad k, falls für alle $t > 0$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ gilt $f(t\boldsymbol{x}) = t^k f(\boldsymbol{x})$. Man gebe ein Beispiel für eine positiv homogene Funktion vom Grad 3 an.

A17.2 Differentialoperatoren

Aufgabe A17.2.1
Für die folgenden Vektorfelder $\boldsymbol{U}(x, y, z) = (u(x, y, z)\ ,\ v(x, y, z)\ ,\ w(x, y, z))^T$ berechne man jeweils Quelldichte div $\boldsymbol{U}$ und Wirbelstärke rot $\boldsymbol{U}$:

a) $u(x, y, z) = \sin(x + y + z)\ ,\ v(x, y, z) = \cos(x + y + z)\ ,\ w(x, y, z) = 0\ ,$

b) $u(x, y, z) = y^2 + z^2\ ,\ v(x, y, z) = x^2 + z^2\ ,\ w(x, y, z) = x^2 + y^2\ ,$

c) $u(x, y, z) = \dfrac{1}{x}\ ,\ v(x, y, z) = \dfrac{1}{y}\ ,\ w(x, y, z) = \dfrac{1}{z}\ ,$

d) $u(x, y, z) = 1\ ,\ v(x, y, z) = 1\ ,\ w(x, y, z) = 1\ .$

Aufgabe A17.2.2
a) Man berechne div $\boldsymbol{f}$ und rot $\boldsymbol{f}$ für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (2x \cosh y, x^2 \sinh y - z^3 \sin y, x + 3z^2 \cos y)^T\ .$$

b) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (1, 2x)^T$.
   i) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und
   ii) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien.

Aufgabe A17.2.3
a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(x, y, z) &= (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))^T \\ &:= (\lambda x^2 + xz, -xy - yz - \lambda y^2, yz)^T\ .\end{aligned}$$

Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ ist f wirbelfrei und für welche quellenfrei?

b) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$. Man berechne div(grad f) und gebe ein Beispiel an, mit div(grad f) $\neq 0$.

Aufgabe A17.2.4
a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0$ mit $k > 0$ für eine Ortsvariable gelöst wird von der Funktion $u(x, t) = e^{-t} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$.

b) Man zeige, dass mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $(x, y, z) \neq \boldsymbol{0}$ die Funktion $u(r, t) = \frac{1}{r} \sin(r - ct)$ die Wellengleichung $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ löst.

Aufgabe A17.2.5
a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ für eine Ortsvariable mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gelöst wird von der Funktion $u(x, t) = 3 \ln(x + ct) - 5 \tan(x - ct)$.

b) Man zeige, dass die Funktion $u(x, y) = e^y \cos x + a + bx + cy + dxy$ mit den Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

A17.3 Das vollständige Differential

Aufgabe A17.3.1

Gegeben sei die Funktion $f(x, y, z) = xz - y^2$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0, z_0) = (3, -1, 2)$. Man bestimme für (x_0, y_0, z_0) den Funktionswert von f, berechne eine Funktionswertnäherung für $f(3{,}1, -1{,}2, 1{,}9)$ unter Verwendung des vollständigen Differentials in (x_0, y_0, z_0) und vergleiche diese mit $f(3{,}1, -1{,}2, 1{,}9)$.

Aufgabe A17.3.2

In einer Tischlerwerkstatt soll ein Holzkegelstumpf nach den vom Auftraggeber vorgegebenen Maßen r, R und h hergestellt werden. Dabei soll das Volumen

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + rR)$$

höchstens um 1 % abweichen dürfen. Mit den vorhandenen Werkzeugen können die Längenmaße bis auf einen Fehler von 0,5 % umgesetzt werden. Kann die Werkstatt die Kundenanforderung bzgl. des Volumens garantieren?
Hinweis: Man linearisiere die Funktion.

Aufgabe A17.3.3

Für die Hintereinanderausführung folgender Funktionen berechne man mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrizen und überprüfe das Ergebnis, indem man direkt ableite:

a) $f(x, y) = f_2(f_1(x, y)) \quad \text{mit} \quad f_1(x, y) = xy \quad \text{und} \quad f_2(t) = e^t$

b) $\boldsymbol{g}(x, y, z) = \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{g}_1(x, y, z)) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{g}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{g}_2(u, v) = \begin{pmatrix} uv \\ u + v \\ \sin(u + v) \end{pmatrix},$$

c) $h(t) = h_2(\boldsymbol{h}_1(t)) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{h}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_2(x, y) = x^2 + y^2\,.$

Aufgabe A17.3.4
Man berechne die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel:

a) $f(x,y)\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 \mapsto \sin(x^2+y^2)$,

b) $\boldsymbol{g}(t)\colon t \mapsto \begin{pmatrix} x = \sin t \\ y = \cos t \end{pmatrix} \mapsto (xy, x^3, y^2)^T$,

c) $h(u,v)\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = u + v \end{pmatrix} \mapsto 3xy^2 + 2x^2 - y$,

d) $\boldsymbol{p}(u,v)\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = v^2 \\ z = v \sin u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xz \\ x^2y^2z \end{pmatrix}$.

Aufgabe A17.3.5
Gegeben sei eine quadratische Funktion $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit einer symmetrischen und positiv definiten Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$.

a) Man zeige: $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$.
b) Man sagt, dass $\boldsymbol{s}$ eine *Abstiegsrichtung* von f im Punkt $\boldsymbol{x}$ ist, falls für $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $\nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{s} < 0$ erfüllt ist.
Für die Funktion $\Phi(\alpha) := f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{s})$ berechne man $\Phi'(\alpha)$ und zeige, dass $\Phi(\alpha)$ ein eindeutig bestimmtes Minimum besitzt in

$$\alpha^* = -\frac{\boldsymbol{s}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})}{\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}} \, .$$

c) Man zeige, dass das Verfahren des steilsten Abstiegs auf folgende Rekursion führt:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \frac{\boldsymbol{g}_k^T\boldsymbol{g}_k}{\boldsymbol{g}_k^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_k}\boldsymbol{g}_k \, , \quad \boldsymbol{g}_k := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{b} \, .$$

Aufgabe A17.3.6
Gegeben sei die quadratische Funktion $f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

a) Man stelle f in der Form $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$ mit symmetrischer Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ dar und überprüfe, ob $\boldsymbol{A}$ positiv definit ist.
b) Man erstelle eine Höhenlinienzeichnung von f im Bereich $[-2,2] \times [-2,2]$.
c) Ausgehend vom Startpunkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ führe man zwei Schritte des Gradientenverfahrens durch.

Aufgabe A17.3.7
Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 5$.

a) Man bestimme die Höhenlinie von f durch den Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (-1,3)^T$. Von welchem Typ ist der Kegelschnitt?