

1.1.10 Wir gehen nach derselben Methode vor wie in Übung 1.1.9 beschrieben. Wenn sich das Volumen der Gasprobe um 25 % erhöht, dann ist $V_2/V_1 = 1,25$. Die Luft muss also auf folgende Temperatur aufgeheizt werden:

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = 1,25 \times (315 \text{ K}) = \mathbf{394 \text{ K}} .$$

1.1.11 Die kombinierte Gasgleichung, Gl. (1.10), beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Druck, dem Volumen und der Temperatur für eine konstante Gasmenge. Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1} \times \frac{T_2}{p_2} .$$

(a) Für einen Druck von 52 kPa bei $-5,0^\circ\text{C}$ gilt

$$V_2 = \frac{(104 \text{ kPa}) \times (2,0 \text{ m}^3)}{(273,15 + 21,1) \text{ K}} \times \frac{(273,15 - 5,0) \text{ K}}{(52 \text{ kPa})} = \mathbf{3,6 \text{ m}^3} .$$

(b) Für einen Druck von 0,880 kPa bei $-52,0^\circ\text{C}$ erhalten wir

$$V_2 = \frac{(104 \text{ kPa}) \times (2,0 \text{ m}^3)}{(273,15 + 21,1) \text{ K}} \times \frac{(273,15 - 52,0) \text{ K}}{(0,880 \text{ kPa})} = \mathbf{178 \text{ m}^3} .$$

1.1.12 Wir verwenden die Zustandsgleichung des idealen Gases, Gl. (1.5a), und drücken die abgegebene Menge des Schwefeldioxidgases über seine Masse, m , und seine Molmasse, M , aus:

$$\begin{aligned} V &= \frac{nRT}{p} = \frac{(m/M)RT}{Mp} = \frac{mRT}{Mp} \\ &= \frac{\underbrace{(250 \times 10^3 \text{ kg})}_{\text{Masse von SO}_2} \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (273,15 + 800) \text{ K}}{(64,06 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}) \times \underbrace{(1,01325 \times 10^5 \text{ Pa})}_{1 \text{ atm} = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}}} \\ &= \mathbf{3,4 \times 10^5 \text{ m}^3} . \end{aligned}$$

1.1.13 Der Stoffmengenanteil (auch *Molenbruch* genannt) ist in Gl. (1.13a) definiert. Die Stoffmengen der Gesamtprobe erhalten wir aus der Summe der Stoffmengen für jede der einzelnen Substanzen, ausgedrückt über ihre jeweilige Masse und ihre Molmasse:

$$\begin{aligned} x_J &= \frac{n_J}{n} \\ &= \frac{(m_J/M_J)}{(m_J/M_J) + \dots} . \end{aligned}$$

Die Molmasse von Benzol ist $M_B = 78,11 \text{ g mol}^{-1}$ und die Molmasse von Toluol (Methylbenzol) ist $M_T = 92,14 \text{ g mol}^{-1}$. Es ergibt sich ein Stoffmengenanteil für Benzol von

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{(56 \text{ g}/78,11 \text{ g mol}^{-1})}{(56 \text{ g}/78,11 \text{ g mol}^{-1}) + (120 \text{ g}/92,14 \text{ g mol}^{-1})} \\ &= \mathbf{0,355} \end{aligned}$$

und für Toluol (Methylbenzol) von

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{(120 \text{ g}/92,14 \text{ g mol}^{-1})}{(56 \text{ g}/78,11 \text{ g mol}^{-1}) + (120 \text{ g}/92,14 \text{ g mol}^{-1})} \\ &= \mathbf{0,645} . \end{aligned}$$

Zur Überprüfung der Plausibilität des Ergebnisses sehen wir: $x_B + x_T = 1$.

1.1.14 Den Partialdruck können wir uns als denjenigen Druck vorstellen, den jede der Komponenten einer Gasmischung ausüben würde, wenn sie sich allein in dem Behälter befände.

- (a) Wir betrachten zunächst den Partialdruck von Stickstoff und verwenden die Zustandsgleichung des idealen Gases, Gl. (1.5a), um das Gesamtvolumen auf Basis dieses Drucks, der Temperatur und der Stoffmenge des gasförmigen Stickstoffs zu berechnen:

$$\begin{aligned} V &= \frac{n_{\text{N}_2} RT}{p_{\text{N}_2}} = \frac{(m_{\text{N}_2}/M_{\text{N}_2})RT}{p_{\text{N}_2}} \\ &= \frac{\{(225 \times 10^{-3} \text{ g})/(28,02 \text{ g mol}^{-1})\} \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (300 \text{ K})}{(15,2 \times 10^3 \text{ Pa})} \\ &= 1,32 \times 10^{-3} \text{ m}^3 . \end{aligned}$$

- (b) Der Partialdruck des Stickstoffs wird allerdings gemäß Gl. (1.12) in Abhängigkeit von seinem Stoffmengenanteil und vom Gesamtdruck definiert. Wir stellen Gl. (1.12) geeignet um und drücken die Stoffmenge jeder Komponente durch die jeweilige Masse und Molmasse aus. Für den Gesamtdruck der Gasmischung erhalten wir

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_{\text{N}_2}}{x_{\text{N}_2}} = \frac{p_{\text{N}_2}}{(n_{\text{N}_2}/n)} = \frac{\overbrace{(n_{\text{CH}_4} + n_{\text{Ar}} + n_{\text{N}_2})}^{\text{Gesamtstoffmenge der Gasmischung, } n} p_{\text{N}_2}}{n_{\text{N}_2}} \\ &= \frac{\left\{ \overbrace{(m_{\text{CH}_4}/M_{\text{CH}_4})}^{n_{\text{CH}_4}} + \overbrace{(m_{\text{Ar}}/M_{\text{Ar}})}^{n_{\text{Ar}}} + \overbrace{(m_{\text{N}_2}/M_{\text{N}_2})}^{n_{\text{N}_2}} \right\} p_{\text{N}_2}}{n_{\text{N}_2}} \\ &= \frac{\left\{ \left(\frac{320 \times 10^{-3} \text{ g}}{16,05 \text{ g mol}^{-1}} \right) + \left(\frac{175 \times 10^{-3} \text{ g}}{39,95 \text{ g mol}^{-1}} \right) + \left(\frac{225 \times 10^{-3} \text{ g}}{28,02 \text{ g mol}^{-1}} \right) \right\} \times 15,2 \times 10^3 \text{ Pa}}{\left(\frac{225 \times 10^{-3} \text{ g}}{28,02 \text{ g mol}^{-1}} \right)} \\ &= 61,2 \times 10^3 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Abschnitt 1.2 Die kinetische Gastheorie

1.2.1 Die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Moleküle ist durch Gl. (1.20a) gegeben:

$$c = \left(\frac{3RT}{M} \right)^{1/2} .$$

- (a) Für N_2 ergibt sich

$$c = \left\{ \frac{3 \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (273 \text{ K})}{(28,02 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})} \right\}^{1/2} = 493 \text{ m s}^{-1} .$$

- (b) Für H_2O ergibt sich

$$c = \left\{ \frac{3 \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (273 \text{ K})}{(18,02 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})} \right\}^{1/2} = 615 \text{ m s}^{-1} .$$

1.2.2 Die mittlere Geschwindigkeit ist durch Gl. (1.20b) wie folgt definiert:

$$\bar{c} = \left(\frac{8RT}{\pi M} \right)^{1/2} .$$

Für He-Atome mit einer Molmasse von $M = 4,00 \text{ g mol}^{-1}$ ergibt sich bei den drei genannten Temperaturen:

$$\begin{aligned} \bar{c}(\text{He}, 79 \text{ K}) &= \left\{ \frac{8 \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (79 \text{ K})}{\pi \times (4,00 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})} \right\}^{1/2} \\ &= \mathbf{647 \text{ m s}^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}(\text{He}, 315 \text{ K}) &= \left\{ \frac{8 \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (315 \text{ K})}{\pi(4,00 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})} \right\}^{1/2} \\ &= 1,29 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = \mathbf{1,29 \text{ km s}^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}(\text{He}, 1500 \text{ K}) &= \left\{ \frac{8 \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (1500 \text{ K})}{\pi \times (4,00 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})} \right\}^{1/2} \\ &= 2,82 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = \mathbf{2,82 \text{ km s}^{-1}} \end{aligned}$$

Für Methanmoleküle mit einer Molmasse von $M = 16,04 \text{ g mol}^{-1}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \bar{c}(\text{CH}_4, 79 \text{ K}) &= \left\{ \frac{8 \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (79 \text{ K})}{\pi \times (16,04 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})} \right\}^{1/2} \\ &= \mathbf{323 \text{ m s}^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}(\text{CH}_4, 315 \text{ K}) &= \left\{ \frac{8 \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (315 \text{ K})}{\pi \times (16,04 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})} \right\}^{1/2} \\ &= \mathbf{645 \text{ m s}^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}(\text{CH}_4, 1500 \text{ K}) &= \left\{ \frac{8 \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (1500 \text{ K})}{\pi \times (16,04 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})} \right\}^{1/2} \\ &= 1,41 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = \mathbf{1,41 \text{ km s}^{-1}} \end{aligned}$$

1.2.3 Nach dem Graham'schen Effusionsgesetz, Gl. (1.22), ist die Effusionsrate umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der Molmasse. Daher ist die relative Rate, mit der Wasserstoff und Kohlenmonoxid aus dem Zylinder entweichen

$$\begin{aligned} \frac{v_{\text{H}_2}}{v_{\text{CO}}} &= \left(\frac{M_{\text{CO}}}{M_{\text{H}_2}} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{28,01 \text{ g mol}^{-1}}{2,02 \text{ g mol}^{-1}} \right)^{1/2} = \mathbf{3,72} . \end{aligned}$$

1.2.4 Die Anzahl der Moleküle, die pro Sekunde aus einem Behälter entweichen, hängt gemäß dem Graham'schen Effusionsgesetz, Gl. (1.22), wie folgt von deren Molmasse ab:

$$v \propto \frac{1}{M^{1/2}} .$$

Das Verhältnis der Stoffmengen bzw. der Anzahl der Moleküle, die in einem gegebenen Zeitraum entweichen, ist also

$$\frac{n_{\text{N}_2}}{n_{\text{CO}_2}} = \left(\frac{M_{\text{CO}_2}}{M_{\text{N}_2}} \right)^{1/2} .$$

Die Anzahl der Moleküle hängt mit deren Masse und ihrer Molmasse zusammen, $n = m/M$, sodass sich ergibt

$$\begin{aligned} n_{\text{N}_2} &= \left(\frac{M_{\text{CO}_2}}{M_{\text{N}_2}} \right)^{1/2} n_{\text{CO}_2} \\ &= \left(\frac{M_{\text{CO}_2}}{M_{\text{N}_2}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_{\text{CO}_2}}{M_{\text{CO}_2}} \right) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} m_{\text{N}_2} &= n_{\text{N}_2} M_{\text{N}_2} \\ &= \overbrace{\left(\frac{M_{\text{CO}_2}}{M_{\text{N}_2}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_{\text{CO}_2}}{M_{\text{CO}_2}} \right)}^{n_{\text{N}_2}} M_{\text{N}_2} \\ &= \left(\frac{M_{\text{N}_2}}{M_{\text{CO}_2}} \right)^{1/2} m_{\text{CO}_2} . \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Werte einsetzen, erhalten wir für die Masse des entwichenen Stickstoffs

$$m_{\text{N}_2} = \left(\frac{28,01 \text{ g mol}^{-1}}{44,01 \text{ g mol}^{-1}} \right)^{1/2} \times 1,0 \text{ g} = \mathbf{0,80 \text{ g}}$$

und in der gleichen Weise für die Masse des entwichenen Heliums

$$m_{\text{He}} = \left(\frac{4,00 \text{ g mol}^{-1}}{44,01 \text{ g mol}^{-1}} \right)^{1/2} \times 1,0 \text{ g} = \mathbf{0,30 \text{ g}} .$$

1.2.5 Das Volumen einer Kugel mit dem Durchmesser d ist gegeben durch

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 = \frac{\pi d^3}{6} .$$

Nach Umstellen erhalten wir für den Durchmesser

$$d = (6V/\pi)^{1/3} .$$

Die mittlere freie Weglänge λ eines Moleküls ist gemäß Gl. (1.23)

$$\lambda = \frac{kT}{2^{1/2} \sigma p} .$$

Wenn wir diese beiden Beziehungen kombinieren und die Gleichung nach dem Druck umstellen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} p &= \frac{kT}{2^{1/2} \sigma (6V/\pi)^{1/3}} \\ &= \frac{(1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}) \times (273,15 + 25) \text{ K}}{2^{1/2} \times \underbrace{(0,36 \times 10^{-18} \text{ m}^2)}_{1 \text{ nm}^2 = 10^{-18} \text{ m}^2} \times \left\{ \underbrace{6 \times (1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3)/\pi}_{1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3} \right\}^{1/3}} \\ &= \underbrace{0,065 \text{ J m}^{-3}}_{1 \text{ J m}^{-3} = 1 \text{ Pa}} = \mathbf{65 \text{ mPa}} . \end{aligned}$$

1.2.6 Die mittlere freie Weglänge λ eines Moleküls ist durch Gl. (1.23) definiert. Wir setzen die angegebenen Werte ein und erhalten

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{kT}{2^{1/2}\sigma p} \\ &= \frac{(1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}) \times (217 \text{ K})}{2^{1/2} \times \underbrace{(0,43 \times 10^{-18} \text{ m}^2)}_{1 \text{ nm}^2 = 10^{-18} \text{ m}^2} \times \underbrace{(0,050 \text{ atm} \times 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa atm}^{-1})}_{1 \text{ atm} = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}}} \\ &= 0,97 \times 10^{-6} \text{ m} = \mathbf{0,97 \mu\text{m}}.\end{aligned}$$

Die Stoßzahl in einem idealen Gas ist durch Gl. (1.25) gegeben, und wir erhalten

$$\begin{aligned}z &= \frac{2\sigma p}{kT} \left(\frac{8RT}{\pi M} \right)^{1/2} \\ &= \frac{2 \times (0,43 \times 10^{-18} \text{ m}^2)}{(1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}) \times (217 \text{ K})} \times \left\{ \frac{8 \times (8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}) \times (217 \text{ K})}{\pi \times (28,02 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})} \right\}^{1/2} \\ &= 120 \times 10^3 \text{ s}^{-1}.\end{aligned}$$

Die Anzahl der Stöße, die im Zeitintervall $\delta t = 1 \text{ s}$ stattfinden, beträgt somit

$$\begin{aligned}N &= z\delta t \\ &= 120 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \times 1 \text{ s} \\ &= \mathbf{120 \times 10^3}.\end{aligned}$$

1.2.7 Die Anzahl der Stöße, die ein Atom oder Molekül erfährt, ergibt sich aus dem Produkt der Stoßzahl z und dem Zeitintervall δt . Wenn wir die Stoßzahl mithilfe von Gl. (1.25) in Abhängigkeit von Temperatur und Druck angeben, dann erhalten wir für die Anzahl der Stöße in 1 s bei einem Druck von 10 bar = 10^6 Pa und einer Temperatur von $(273,15 + 25) \text{ K} = 298 \text{ K}$

$$\begin{aligned}N &= z\delta t \\ &= \frac{2\sigma p}{kT} \left(\frac{8RT}{\pi m_{\text{Ar}}} \right)^{1/2} \delta t \\ &= \frac{2\sigma p}{kT} \left(\frac{8kT}{\pi m_{\text{Ar}}} \right)^{1/2} \delta t \\ &= 2\sigma p \left(\frac{8}{\pi m_{\text{Ar}} kT} \right)^{1/2} \delta t.\end{aligned}$$

Die Masse des Argonatoms beträgt $m_{\text{Ar}} = 39,95 \times m_{\text{u}} = 39,95 \times (1,602 \times 10^{-27} \text{ kg})$, und der Stoßquerschnitt ist mit $\sigma = 0,36 \text{ nm}^2$ angegeben. Somit erhalten wir für die Anzahl der Stöße

$$\begin{aligned}N &= 2 \times \overbrace{(0,36 \times 10^{-18} \text{ m}^2)}^{\sigma} \times (10^6 \text{ Pa}) \\ &\quad \times \left\{ \frac{8}{\pi \times \underbrace{39,95 \times (1,602 \times 10^{-27} \text{ kg})}_{m_{\text{Ar}}} \times (1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}) \times (298 \text{ K})} \right\}^{1/2} \\ &\quad \times (1 \text{ s}) \\ &= \mathbf{7,0 \times 10^{10}}.\end{aligned}$$

Die Anzahl der Stöße ist direkt proportional zum Druck, sodass wir für einen Druck von 100 kPa, also einem Zehntel des soeben verwendeten, erhalten

$$N = 7,0 \times 10^9$$

und bei einem Druck von nur 1 Pa, der um den Faktor 10^{-6} geringer ist als der ursprüngliche Druck,

$$N = 7,0 \times 10^4.$$