1 Aussagenlogik, Mengen und Zahlen

In mathematischen Formulierungen werden vielfach abkürzende und symbolische Ausdrücke der Übersichtlichkeit wegen verwendet. In diesem Kapitel werden Grundlagen und symbolische Bezeichnungsweisen zusammengefasst, die bei späteren Darstellungen immer wieder verwendet werden. Als Basis mathematischer Denk- und Vorgehensweise werden zunächst Grundsätze der Aussagenlogik erklärt. Anschließend werden Mengen und deren Darstellungen beschrieben. Von grundsätzlicher Bedeutung für mathematische Berechnungen sind Zahlen mit den zugehörigen Rechenregeln für Addition und Multiplikation. Hier wird ein Überblick über das Zahlensystem bis einschließlich der reellen Zahlen gegeben. Dabei werden an geeigneter Stelle aus der Schule bekannte Begriffsbildungen wie beispielsweise Teilbarkeit, der binomische Lehrsatz und Intervalle erklärt.

1.1 Aussagenlogik

Grundlegend für die Untersuchung und Ergebnisformulierung mathematischer Sachverhalte ist die Aussagenlogik. In Sätzen werden Aussagen formuliert, die unter den dort angegebenen Voraussetzungen gelten. Die vollständige und lückenlose Erklärung, weshalb die Aussage im Satz unter den Voraussetzungen richtig ist, bezeichnet man als Beweis. In der Aussagenlogik werden Aussagen in unterschiedlicher Weise mit Aussagen verknüpft, um neue Aussagen zu erhalten.

1.1.1 Aussagen

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, bei dem eindeutig entschieden werden kann, ob es wahr oder falsch ist. Eine dritte Möglichkeit für den *Wahrheitswert* einer Aussage (*tertium non datur*) gibt es nicht. Ob oder von wem der Wahrheitswert ermittelt werden kann, ist nicht von Bedeutung. Der Inhalt einer Aussage ist nicht Gegenstand der Aussagenlogik.

Der Sachverhalt einer Aussage wird im Allgemeinen sprachlich durch einen grammatikalisch korrekten Satz beschrieben. Eine grammatikalisch falsche Formulierung verändert die Aussage jedoch nicht, solange der Sachverhalt unverändert bleibt.

Als Abkürzung für die sprachliche Formulierung einer Aussage werden häufig große Buchstaben aus dem Alphabet beispielsweise A, B oder C verwendet. Für den Wahrheitswert $w(A)$ einer Aussage A werden als Abkürzungen 1 oder w für richtig und 0 oder f für falsch verwendet.

Brückenkurs Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften, R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe und T. Sonar.

Keine Aussagen sind sprachliche Formulierungen wie Fragen, Befehle oder Ausrufe.

Beispiele für Aussagen

A: $3 \cdot 3 = 9$, $w(A) = 1$, B: $3 + 3 = 9$, $w(B) = 0$,
C: Napoleon Bonaparte ist 1,58 m groß gewesen. D: Wir sind in der Bibliothek.

Keine Aussagen

E: Welcher Tag ist heute? F: Geh in die Bibliothek! G: Hallo! H: $x^2 + y^2$.

1.1.2 Verknüpfung von Aussagen

Aussagen können untereinander verknüpft werden. Ein inhaltlicher Zusammenhang zwischen verknüpften Aussagen muss nicht bestehen. Die logischen Verknüpfungszeichen werden *Junktoren* genannt.

Der Wahrheitswert der durch Verknüpfung entstandenen neuen Aussage bestimmt sich allein durch die Wahrheitswerte der daran beteiligten elementaren Aussagen A und B. Es werden die folgenden Junktoren beschrieben.

Übersicht über Junktoren.

	Bezeichnung	**Sprachliche Formulierung**
$\neg A$	Negation	Nicht A
$A \vee B$	Disjunktion	A oder B
$A \wedge B$	Konjunktion	A und B
$A \Rightarrow B$	Implikation	Aus A folgt B
$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz	A ist äquivalent zu B

Die Wahrheitswerte verknüpfter Aussagen werden mit Hilfe von *Wahrheitstafeln* festgelegt. In einer Wahrheitstafel stehen in der ersten Zeile die beteiligten Aussagen und deren Verknüpfungen. In den weiteren Zeilen stehen die zugehörigen Wahrheitswerte. In der letzten Spalte der Tafel wird der Wahrheitswert der verknüpften Aussage aufgeführt.

Bei $n = 1, 2, 3, \dots$ beteiligten elementaren Aussagen ergeben sich 2^n Zeilen für alle verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten der Wahrheitswerte. Diese Anzahl erhält man beispielsweise induktiv. Bei einer Aussage A gibt es zwei Möglichkeiten. Bei zwei Aussagen A und B gibt es die beiden Wahrheitswerte von A für die beiden Fälle, dass B richtig oder falsch ist. Damit erhält man vier verschiedene Wahrheitswertkombinationen. Kommt eine weitere Aussage C hinzu, so erhält man die vier Varianten von A und B für die beiden Fälle, dass C richtig oder falsch ist, also insgesamt acht Möglichkeiten. Dieses induktive Prinzip setzt sich dann allgemein für die nächst höhere Anzahl der beteiligten elementaren Aussagen fort.

Negation (nicht): Die Negation von A ist falsch, wenn A wahr ist, und wahr, wenn A falsch ist. Der Wahrheitswert wird durch $\neg$ also genau umgekehrt.

Wahrheitstafel zu „$\neg$“.

A	$\neg$***A***
1	0
0	1

Beispiele

a) $A\,:\,3\cdot 3=9$, $w(A)=1$ führt auf $\neg A\,:\,3\cdot 3\neq 9$, $w(\neg A)=0$.
b) $B\,:\,3+3=9$, $w(B)=0$ führt auf $\neg B\,:\,3+3\neq 9$, $w(\neg B)=1$.

Disjunktion (oder): Die Disjunktion von zwei Aussagen A, B ist nur dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind. Das umgangssprachliche „entweder A oder B“, bei dem nur eine Aussage richtig sein darf, ist hier nicht gemeint.

Wahrheitstafel zu „$\vee$“.

A	***B***	***A*** $\vee$ ***B***
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Beispiele

a) $A\vee B\,:\,(3\cdot 3=9)\vee(3+3=9)$ ist eine wahre Aussage.
b) A oder $\neg A$ ist in jedem Fall richtig, denn eine von beiden Aussagen A oder $\neg A$ ist immer wahr.

Wahrheitstafel zu „$A\vee\neg A$“.

A	$\neg$***A***	***A*** $\vee\neg$***A***
1	0	1
0	1	1

Eine Aussage, die in jedem Fall richtig ist, wird als *Tautologie* bezeichnet.

Konjunktion (und): Die Konjunktion von zwei Aussagen A, B ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. In allen anderen Fällen ist sie also falsch.

Wahrheitstafel zu „$\wedge$“.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiel

Wahrheitstafel zu „$A \wedge \neg A$“.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
0	1	0

Diese Aussage ist in jedem Fall falsch, denn A und $\neg A$ haben entgegengesetzte Wahrheitswerte, können also nicht beide richtig sein.

Implikation (wenn ..., dann ...): Für die Aussagen A und B ist die Implikation $A \Rightarrow B$ nur falsch beziehungsweise nicht zulässig, wenn A richtig und B falsch ist.

Das bedeutet, dass aus einer richtigen Aussage A nicht auf eine falsche Aussage B geschlossen werden kann, sondern nur auf eine richtige. Wenn also A gilt, dann gilt notwendig auch B. Dieses Prinzip bildet die Grundlage mathematischer Beweise. Beim direkten *Beweis* startet man mit einer richtigen Aussage (Voraussetzung) und erhält durch eine Folge von gültigen Implikationen am Ende notwendig eine richtige Aussage (Behauptung).

Vom Standpunkt der Aussagenlogik muss zwischen den beiden Aussagen A und B kein inhaltlicher Zusammenhang bestehen, damit $A \Rightarrow B$ richtig sein kann. Bei mathematischen Schlussfolgerungen besitzt dieser Aspekt in der Regel jedoch keine Bedeutung.

Wahrheitstafel zu „$\Rightarrow$“.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Beispiele (die vier Fälle bei Gleichungsumformungen)
A: $1 = 1 \Rightarrow B : 3 = 3$, $+2$ auf jeder Seite von A ist erlaubt.
A: $1 = 1 \Rightarrow B : 1 = 3$, $+2$ nur auf einer Seite von A ist falsch.
A: $1 = 2 \Rightarrow B : 0 = 0$, $\cdot\, 0$ auf jeder Seite von A ist erlaubt.
A: $1 = 2 \Rightarrow B : 3 = 4$, $+2$ auf jeder Seite von A ist erlaubt.

Beispiel Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt *Primzahl*, wenn n genau die beiden Teiler 1 und n besitzt.

Betrachtet werden jetzt die beiden folgenden Aussagen A und B:

A: n ist eine Primzahl,
B: n ist eine ungerade Zahl.

Es soll nachgewiesen, dass für $n \geq 3$ die Implikation $A \Rightarrow B$ gilt:

$$n \geq 3 \text{ ist eine Primzahl} \quad \Rightarrow \quad n \text{ ist eine ungerade Zahl} .$$

Dazu wird für die vier verschiedenen Möglichkeiten der Wahrheitswerte von A und B in der Wahrheitstafel die Übereinstimmung mit den Wahrheitswerten von $A \Rightarrow B$ überprüft.

1. Fall A ist richtig: n ist eine Primzahl.
B ist richtig: n ist eine ungerade Zahl.
$A \Rightarrow B$ ist richtig,
denn wäre $n \geq 3$ als Primzahl gerade, gäbe es mindestens die drei Teiler $1, 2, n$ und A wäre falsch.
2. Fall A ist richtig: n ist eine Primzahl.
B ist falsch: n ist eine gerade Zahl.
$A \Rightarrow B$ ist falsch, Begründung wie im Fall 1.
3. Fall A ist falsch: n ist keine Primzahl und ungerade.
B ist richtig: da n ungerade ist.
$A \Rightarrow B$ ist richtig.
4. Fall A ist falsch: n ist keine Primzahl und gerade.
B ist falsch: da n gerade ist.
$A \Rightarrow B$ ist richtig.

Von mathematischem Interesse sind nur die ersten beiden Fälle. Nachgewiesen wurde darin, dass eine Primzahl $n \geq 3$ notwendig auch ungerade sein muss. Man nennt B dann auch *notwendige Bedingung* für A.

Andererseits reicht die Information $n \geq 3$ ist eine Primzahl hin, um auf eine ungerade Zahl zu schließen. Man nennt A dann auch *hinreichende Bedingung* für B.

Die Umkehrung $B \Rightarrow A$ ist nicht für alle ungeraden Zahlen $n \geq 3$ richtig, da die Primzahlen nur eine Teilmenge der ungeraden Zahlen sind. Aus der Kenntnis, dass $n = 9$ eine ungerade Zahl ist, kann also nicht geschlossen werden, dass $n = 9$ auch Primzahl ist. B ist also keine hinreichende Bedingung für A.

Äquivalenz (genau dann, wenn): Für die Aussagen A und B ist die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ genau dann wahr, wenn A und B den gleichen Wahrheitswert besitzen. A und B sind dann äquivalent und können überall durcheinander ersetzt werden. Sind die Wahrheitswerte verschieden, so ist $A \Leftrightarrow B$ falsch und A und B sind nicht äquivalent.

Bei mathematischen Betrachtungen wird zwischen den Aussagen A und B in der Regel ein inhaltlicher Zusammenhang bestehen. Notwendig ist dies vom Standpunkt der Aussagenlogik jedoch nicht.